CORSO

ELEMENTARE

DI FISICA

TERZA EDIZIONE

TOMO SECONDO

CORSO ELEMENTARE

DI

FISICA

CAPITOLO XXI.

Della Gravitazione universale.

480. Le dottrine stabilite fin qui ci fan la strada ad esporre la teorica della gravitazione universale. Ma perchè più facilmente s' intenda quello, che per cio noi diremo, crediamo opportuno di premettere una sommaria esposizione di quei tra' fenomeni del sistema del mondo, ai quali dovrà principalmente riferirsi il nostro discorso, e di accennarne la spiegazione secondo l' ipotesi copernicana ricevuta in oggi generalmente. Noi supponiamo nei lettori relativamente a questo soggetto quelle notizie, che si danno in qualunque per quanto superficial trattato di Sfera armillare, che dee necessariamente premettersi anche ai soli primi elementi della Geografia.

Del Sistema del Mondo.

481. Concorrono pertanto a formare il nostro sistema mondiale il Sole, undici pianeti primarj chiamati Mercurio, Venere, Terra, Marte, Cerere, Pallade Giunone, Vesta, Giove, Saturno, ed Urano; diciotto pianeti secondarj o *satelliti*; cioè la Luna satellite

della Terra; quattro satelliti di Giove, sette di Saturno, sei d' Urano; e per lo meno circa 124 comete; che tante, che io sappia, se ne sono osservate finora.

Il Sole occupa il centro del sistema, e intorno ad esso si aggirano i pianeti primarj, in orbite ellittiche variamente inclinate tra loro e le comete in traiettorie, la cui natura non si conosce peranche con tutta la precisione. Noi con Copernico, e Galileo collochiamo il Sole nel centro dell' universo, e annoveriamo la Terra nel numero dei pianeti, perchè tutti convengono al dì d'oggi, che essa non solo roti con *moto diurno* intorno al proprio asse, ma descriva ancora con *moto annuo* l'ecclittica, che a noi sembra descritta oppositamente dal Sole, il quale sta fisso in un dei fuochi della medesima. Noi siamo naturalmente portati a giudicare, che il Sole, e tutti i corpi celesti girino intorno alla Terra; ma ove si rifletta alcun poco, è facile di persuadersi, che i moti, da cui e' ci sembrano trasportati, appartengono effettivamente alla Terra. E realmente egli è se non assurdo affatto, certamente irragionevole al sommo di supporre, chè il Sole, il cui volume è almeno un milione di volte più grande di quello della Terra, che il Sole, dissi, e un numero innumerabile di corpi celesti gli uni totalmente indipendenti dagli altri, e sommamente lontani tra loro sian tutti concordi nel ravvolgersi col moto diurno d' oriente in occidente intorno alla Terra, che è quasi un atomo impercettibile in loro confronto; ed a ravvolgersi tutti precisamente nel medesimo breve tempo di circa 24 ore, cioè con una celerità, che per i più remoti oltrepasserebbe immensamente i limiti della nostra immaginazione.

482. In oltre la *longitudine* delle stelle fisse, cioè la

loro distanza dal punto equinoziale di primavera contata sull' ecclittica d' occidente in oriente cresce ogni anno di circa 50", e 20'''; che è quanto dire, o le fisse si avanzano di occidente in oriente, o i *punti equinoziali*, cioè le intersezioni dell' equatore coll' ecclittica, retrocedono d' oriente in occidente ogni anno per circa 50", e 20'''. Per lo che il Sole, che vediamo percorrer l' ecclittica *secondo l' ordin dei segni*, vale a dire d' occidente in oriente, incontra i punti equinoziali ogni anno 20', 22" prima di giugnere, dove gl' incontrò l' anno precedente: tanto essendo il tempo, che egli impiega nel percorrere l' archetto di 50", e 20''', per cui si osserva, che essi punti annualmente retrogradano verso occidente. Questo fenomeno si chiama *Precessione degli equinozj*. Ora per ispiegarlo nell' ipotesi, che la Terra sia immobile, conviene supporre nelle stelle combinato col rapidissimo moto diurno un altro contrario lentissimo moto di rotazione intorno l' asse dell' ecclittica d' occidente in oriente, o sivvero un moto retrogrado d' oriente in occidente nei punti equinoziali intorno al medesimo asse.

483. E poichè il moto delle stelle così spiegabile va soggetto ad una certa periodica ineguaglianza, per cui si vedono ora accostarsi, ora scostarsi dall' equatore; egli è necessario d' attribuire ad esse stelle un altro piccol moto, che produca questa così detta *Nutazione*.

484. Ai quali moti comuni a tutta la sfera celeste, e tali perciò, che non alterano i rapporti di posizione delle fisse, conviene aggiungerne un altro periodico anch' esso, che fa variare alquanto questi rapporti; giacchè si osserva, che le stelle descrivono ogni anno parallelamente all' ecclittica delle ellissi di sì piccol diametro, che il massimo non oltrepassa 40": feno-

meno conosciuto sotto il nome di *Aberrazione delle fisse*.

485. Ora tutto ciò renderebbe sì viziosamente complicata la macchina mondiale, che tal certamente non può esser escita dalla mano onnipotente del Creator Sapientissimo.

Così parimente non è possibile di spiegare in una maniera conforme alla semplicità della Natura le variazioni, che mostrano nei loro moti i pianeti ora *diretti*, cioè procedenti secondo l'ordine dei segni, ora *retrogradi*, cioè mossi in senso opposto, ora *stazionarj*, ove si supponga, che essi insieme col Sole si aggirino nelle loro orbite intorno alla Terra.

486. Laddove di tutto si dà una semplicissima, ed elegantissima spiegazione, ponendo, che i pianeti, e tra questi la Terra, scagliati dalla mano del Creatore con una forza, la cui direzione non passi pel respettivo loro centro di gravità, abbian concepiti due moti (407) uno di rotazione intorno al proprio asse, l'altro progressivo curvilineo intorno al Sole. La quale ipotesi relativamente ai pianeti in generale è provata direttamente, giacchè dalle osservazioni si è dedotto, che tutti girano intorno al Sole, e l'analogìa ci persuade, che tutti pure rotano intorno al proprio asse, essendo noto, che rotano così cinque pianeti primarj, la Luna, tutti i satelliti di Giove, ed uno tra' satelliti di Saturno. Siam dunque autorizzati ad ammettere questa ipotesi relativamente alla Terra non tanto dalla sua semplicità, quant' ancora dall' analogìa: ed ove ella sia ammessa, la spiegazione dei più importanti fenomeni astronomici deducesi elegantemente dalla semplice considerazione, che se le direzioni de' moti della Terra siano d' occidente in oriente, o d' oriente in occidente, gli

Abitatori di essa trasportati senza accorgersene dal moto, che seco lei han comune, debbon giudicare, che il Sole, e la sfera celeste vadano d' oriente in occidente, o d' occidente in oriente con moti precisamente eguali, ma opposti, per quella stessa illusione, per cui a chi siede in una nave, che si scosta dal lido, sembra, che il porto, o il lido si scostino dalla nave.

487. Realmente abbia la Terra concepito d' occidente in oriente un moto di rotazione intorno al proprio asse, ed uno progressivo intorno al Sole. In questa ipotesi

I. Sia ADBE (*Fig.* 1) il globo della terra; BA ne sia l' asse diretto verso il polo P del cielo: il circolo DE rappresenti il parallelo all' equatore, che il punto D descrive rotando la Terra intorno ad AB; F il punto della sfera celeste, che corrisponde verticalmente al punto D della Terra, G quello, che corrisponde al punto E. La retta CDF, che è la linea dello zenit del punto D, gira insieme con esso punto intorno all' asse d' occidente in oriente; e quindi la sua estremità descrive il circolo FG parallelo all' equatore terrestre, ed al circolo DE, cui esattamente corrisponde, perchè tutti i punti F, G di esso sono lontani dal polo celeste P lo stesso numero di gradi, che tutti i punti D, E dal polo A della Terra. Dunque la linea CDF durante la rotazione terrestre, cioè in circa 24 ore incontra di occidente in oriente tutti i punti del cielo, che sono alla distanza FP dal polo; e perciò un Abitatore della Terra collocato in D gli vedrà passare successivamente pel suo zenit; e poichè non avverte di muoversi, giudicherà, che stando immobile la linea CDF, i detti punti si accostino ad essa, e l' oltrepassino d' oriente in occidente. Il discorso, che abbiamo fatto per il punto F,

si applichi a tutti i punti, che costituiscono il cerchio celeste PFG, e sarà spiegata l'apparente rotazione del cielo intorno alla Terra.

Ora la Terra rotando intorno al proprio asse presenta successivamente tutti i punti della sua superficie al Sole, opponendoli costantemente un emisfero, che ne resta illuminato. Così tutti i punti della superficie terrestre nello spazio di circa 24 ore trovansi successivamente illuminati dal Sole, e immersi nell'ombra. La luce costituisce il giorno, l'ombra la notte: ed ecco onde proviene l'alternativa del giorno, e della notte; e l'apparenza del Sole, che spunta, e tramonta in 24 ore.

488. II. Gli Abitatori della Terra riportano la situazione del Sole, cioè vedono il Sole in quei punti della volta celeste, dove cadono successivamente i raggi visuali, che vanno ad esso dal loro occhio. Perciò quando la Terra è, per es., nel segno dell'Ariete (*Fig.* 2) Z, il Sole sembra loro nell'opposto segno o costellazione della Libra L: e passando la Terra nel segno del Toro, giudicano, che il Sole passi nello Scorpione: e così il Sole comparisce sempre in un punto dell'ecclittica opposto, cioè distante 180° da quello, in cui si trova la Terra. Per lo che descrivendo questa la sua orbita annua, e così percorrendo i segni dello zodiaco, noi vediamo successivamente il Sole nei segni opposti; e quindi giudichiamo, che vada oppositamente movendosi per l'orbita stessa. E poichè il diametro apparente del Sole veduto nel Cancro si trova eguale a 31', 516; si trova eguale a 32', 593 quando si osserva nel Capricorno; giustamente se ne deduce, che non è sempre a egual distanza dalla Terra; e perciò, che l'orbita della Terra non è già circolare, ma ellittica; che il Sole è più vicino alla Terra quando si vede nel Capricorno,

punto, che perciò si dice *perigèo*; più lontano quando si vede nel Cancro, punto chiamato *apogeo*.

489. III. Ora l'asse della terra è inclinato al piano dell' ecclittica per 66°, 32'; e nel corso dalla rivoluzione annuale si mantiene sensibilmente parallelo a se stesso (414). Quindi ha origine l'annuo periodico cambiamento delle stagioni e l' ineguaglianza de' giorni, e delle notti. Un luogo della Terra ha il principio dell' estate, quando il Sole a mezzogiorno è alla massima possibile vicinanza allo zenit di esso luogo; ha il principio dell' inverno, quando il Sole ne è alla massima distanza; talchè i paesi compresi nella zona torrida hanno l' estate quando il Sole si trova a perpendicolo sopra di loro. Egli è poi chiaro, che il Sole è a perpendicolo sopra di un punto della superficie terrestre sensibilmente sferica, quando il raggio, che parte dal centro del Sole, va a quello della Terra per detto punto. Sia pertanto il Sole S presso al centro dell' ecclittica C L c Z; e i circoli PEAF, peaf rappresentino la Terra, quando il centro ne è nei punti C, c dell' ecclittica. Supponiamo la terra in C nel punto dell' intersezione del tropico del Capricorno coll' ecclittica; onde agli Abitanti della medesima il Sole sembri nel tropico del Cancro. Le rette AP, ap rappresentino l' asse della Terra parallelo all'asse della sfera celeste; e le EF, ef; GH, gh; IK, ik; II, ih rappresentino i diametri dell' equatore, dei tropici del Cancro, e del Capricorno, e dell' ecclittica sulla superficie terrestre nelle posizioni C, c della Terra. Essendo l' asse AP inclinato al piano dell' ecclittica rappresentato da CSc per 66°, 32'; cioè essendo ang. PCS = 66°, 32', sarà 23°, 28' l' angolo SCF, ovvero HCF, che l' equatore della Terra normale all' asse fa col piano dell' ecclittica, o col raggio

SHC, che è nel piano medesimo; e perciò sarà l'arco HF = 23°, 28'. Trovandosi dunque la Terra nel tropico celeste del Capricorno (lo che segue ai 22 Giugno) il raggio SC, che dal centro del Sole va a quello della Terra, passa per un punto distante 23°, 28' dall' equatore verso il polo artico; cioè passa pel tropico terrestre del Cancro: e per conseguenza in quel giorno, cioè il 22 di Giugno, il Sole è perpendicolare, e perciò si ha il principio dell' estate nei paesi, che trovansi in questo circolo, e nel rimanente dell' emisfero verso il polo boreale, dal quale il Sole non può mai esser meno distante. Sei mesi dopo, cioè il 22 Decembre la terra si troverà nel punto c diametralmente opposto a C, vale a dire nel tropico del Cancro. In questa situazione essendo l' asse terrestre a p parallelo ad A P, cioè inclinato egualmente verso la medesima parte, che nella precedente situazione, il raggio solare S i c invece di corrispondere al tropico terrestre del Cancro, corrisponde al tropico del Capricorno; e perciò tutti i paesi situati su questo tropico, e nel resto dell'emisfero verso il polo australe avranno il principio dell' estate in quel giorno. E poichè mentre si ha l' estate in un emisfero, si ha l' inverno nell' emisfero opposto; l' inverno pei paesi settentrionali comincerà il 22 Decembre, e per gli australi il 22 Giugno. Siccome poi nei giorni, in cui il Sole corrisponde ai tropici cangia la sua apparente direzione, e perciò sembra agli Abitanti della Terra, che si soffermi; così questi giorni si dicono giorni del *solstizio*; e *solstiziali* i punti, cui corrisponde il Sole in detti giorni.

La primavera, e l' autunno cominciano pe' diversi paesi quando il Sole è alla media distanza da loro nel

passaggio dall' inverno all' estate, e dall' estate all' inverno. Ora poichè l' asse PA, pa riman parallelo a se stesso in tutti i punti dell' ecclittica; e il raggio solare corrisponde sempre perpendicolarmente a uno dei punti della circonferenza del cerchio, che ha per diamentro II, ovvero hi, cioè dell' ecclittica riportata sulla superficie terrestre; quando la terra percorrendo la sua orbita arriverà a 90° da' punti C, e c (il che seguirà ai 21 di Marzo, e ai 23 di Settembre) il raggio solare SC ridotto normale all' asse AP, e confondendosi col diametro ECF dell' equatore, anderà perpendicolarmente sul punto d' intersezione di esso equatore coll' ecclittica IH. Nei giorni adunque 21 Marzo, e 23 Settembre

1.° Comincerà l' estate sull' equatore.

2.° Essendo il Sole alla media distanza tra' due tropici, il 21 Marzo comincerà la primavera nell' emisfero boreale, l' autunno nell' australe; e il 23 Settembre l' autunno nel boreale, la primavera nell' australe.

490. 3.° I raggi del Sole giugnendo sulla Terra da una distanza grandissima sono sensibilmente paralleli; e quindi non possono, come è evidente, che illuminare il solo emisfero terrestre opposto al Sole. Dunque nella Terra è costantemente un emisfero illuminato, ed uno oscuro. Il limite, che separa l' emisfero illuminato dall' oscuro è un cerchio, che chiameremo *terminatore*, al cui piano è sempre normale il raggio SC. Ora essendo l' equatore normale all' asse AP, quando il Sole è a perpendicolo sopra l' equatore, cioè quando il raggio SC si confonde col diametro ECF, il diametro del cerchio terminatore coinciderà coll' asse AP; ambi i poli saran perciò illuminati; e i piani dell' equatore, e di tutti i paralleli saran divisi nel mezzo

da detto terminatore; e quindi rotando la Terra intorno all' asse, saranno tutti per metà nella luce, per metà nelle tenebre; cioè sarà per tutto il giorno eguale alla notte. Questo fenomeno è indicato col nome d'*equinozio*. Si ha dunque equinozio quando la Terra nella sua rivoluzione annua arriva in quella posizione, per cui i punti d' intersezione dell' equatore coll' ecclittica sulla sua superficie restano a perpendicolo sotto del Sole; cioè nel 21 Marzo si ha l' equinozio di primavera, nel 23 Settembre l' equinozio d' autunno. Allontanandosi la Terra da queste posizioni, come il raggio SC non coincide più col diametro dell' equatore; così il diametro del terminatore non può più coincider coll' asse AP; e quindi i poli non son più entrambi illuminati; e i piani dei paralleli non son più divisi dal terminatore in parti eguali. Supponendo, per fissare le idee, che la Terra sia giunta nel Capricorno, o nel Cancro, il raggio SC caderà normalmente sul tropico corrispondente: il terminatore dividerà per il mezzo il solo piano dell' equatore, non già i paralleli, dei quali quei, che sono verso il polo illuminato hanno la maggior parte nella luce, la minore nell' ombra; e al contrario quei, che sono verso il polo oscuro hanno la maggior parte nell' ombra, la minore nella luce. Laonde per la rotazione diurna della Terra i primi hanno il giorno più lungo della notte; i secondi la notte più lunga del giorno; e solo nel piano dell' equatore la notte è sempre eguale al giorno.

491. Ma gl' intervalli di tempo, che separano gli equinozj ed i solstizj non sono eguali. L' intervallo tra l' equinozio di primavera, e quello d' autunno è circa 7 giorni più lungo di quello, che separa l' equinozio d' autunno da quello di primavera. È chiaro dunque.

che il moto apparente del Sole, o il moto reale della Terra non è uniforme: è più celere presso il perigeo, quando il Sole è nei segni australi dello zodiaco, la Terra ne' boreali; meno celere nell' apogeo, quando il Sole è nei segni boreali, la Terra negli australi. Quindi hanno origine le ineguaglianze de' tempi misurati col moto apparente del Sole. Ma di queste non dobbiam parlare, per non entrar tropp' oltre nella provincia degli Astronomi.

492. IV. Apparisce pertanto ben chiaramente da quanto abbiam detto, che il periodo delle stagioni, e degli equinozj dipende principalmente dal parallelismo dell' asse della Terra. Ora se questo parallelismo non sia precisamente assoluto, ma l' asse AP della Terra abbia un piccolissimo *moto conico*, come dicono, d' oriente in occidente intorno ad un asse r t parallelo a quello dell' ecclittica; cioè se rappresentando r t (*Fig.* 3) un asse parallelo a quello dell' ecclittica, il quale intersechi l' asse AP della terra nel centro C; quest' asse AP vada lentissimamente rotando d' oriente in occidente, e perciò descrivendo intorno ad r t le due superficie coniche ACa, PCp; l' annuo periodo delle stagioni sarà alcun poco alterato; gli Abitanti della Terra vedranno le stelle fisse avanzarsi annualmente d' occidente in oriente; l' intersezione dell' equatore coll' ecclittica retrocederà ogni anno; e così riducendosi ogn' anno più presto a perpendicolo sotto del Sole, gli equinozj anticiperanno annualmente. Se ne spiega dunque benissimo l' annua precessione di 20', 22" (482) supponendo, che l' asse dell' equatore vada lentissimamente rotando intorno ad un asse parallelo a quel dell' ecclittica, e così descriva intorno al medesimo nel periodo di 25663 anni come due superficie coniche,

le quali si oppongano scambievolmente il vertice nel punto d' intersezione corrispondente al centro della Terra.

493. V. Che se la cagione di questo moto conico dell' asse terrestre non agisca uniformemente, ma ora più per un verso, ora più per un altro con qualche periodo; egli è chiaro, che dee risultarne una tale apparenza di moto nelle fisse, che serva a spiegarne la Nutazione (483).

Dedurremo fra poco dalle leggi generali della Natura, che questi moti debbono effettivamente aver luogo; e così nulla mancherà per ispiegar completamente gli accennati fenomeni. Nel trattato poi, che daremo in seguito della luce, farem vedere, come ammesso il moto della terra, l' aberrazione delle fisse (484), e le varie apparenze del moto dei pianeti si spiegano colla più gran semplicità, e precisione. Per altro quei, che vogliono una piena, ed esatta contezza e di questi, e dei sopra rammentati fenomeni consulteranno gli Astronomi, giacchè noi nè possiamo, nè dobbiamo trattenerci a ragionarne più lungamente di quel, che bisogni per mostrare quanto sia conforme alla semplicità della Natura l' ipotesi copernicana sul moto della Terra (che sarà confermata in seguito con ragioni più dirette), e per render facilmente intelligibile la teorica della gravitazione universale, che siam per esporre, e le sue applicazioni.

494. Come i pianeti primarj si aggirano intorno al Sole; così i secondarj s' aggirano intorno ai loro primarj.

La Luna è tra' pianeti secondarj quello, che più c' interessa; e solo di essa direm qualche cosa.

La Luna ha la figura sferica, ed il volume circa 49

volte minore di quello della Terra. La sua superficie osservata con buoni telescopj comparisce sparsa di prominenze, e di cavità, che sono state partitamente notate nelle così dette *carte selenografiche*, o descrittive della Luna; e presenta qualche apparenza di vulcani o già estinti, o ardenti tuttora.

Mentre la Terra percorre l' ecclittica intorno del Sole *secondo l'ordine dei segni*, o d' occidente in oriente, la Luna descrive la sua orbita attorno della Terra nel senso stesso. Il moto della Luna per la sua orbita presenta al Fisico delle particolarità, che non possiamo dispensarci dal considerare alcun poco.

495. Sia ABC l' ecclittica (*Fig.* 4): suppongasi il Sole in S, la Terra in T. La curva NEPD rappresenti l' orbita della Luna. Questa è ellittica, ed ha un fuoco in T. La Luna adunque nel percorrerla non è sempre ad egual distanza della Terra T. Il punto dell' orbita più vicino alla Terra dicesi *Perigèo*, *Apogèo* il più lontano. La distanza media dalla superficie della Terra è di 59 raggi terrestri; di 60 dal centro. Riducendo a leghe questa distanza, si trova là media dalla superficie terrestre espressa per circa 84515, la perigèa per 79862; l' apogèa per 89167.

La Luna è, come tutti gli altri pianeti, un globo opaco, e dee il suo splendore alla luce del Sole. Questo non può illuminarne, che la metà, cioè l' emisfero rivolto verso di esso. Perciò la Luna nella sua rivoluzione dee presentare ad un osservatore situato sulla superficie della Terra or più, or meno di questo emisfero illuminato, secondo le diverse posizioni, in cui ella si trova relativamente al medesimo. Quindi hanno origine le *Fasi*, o sia le diverse apparenti illuminazioni della Luna. Quando la Terra T, o lo spettatore

terrestre è tra il Sole in S, e la Luna in P, ne vede tutta intera la superficie illuminata, che rassembra perfettamente circolare, e dicesi *Luna piena*. Ma a proporzione che questa va avvicinandosi al Sole ne diminuisce la parte illuminata visibile; e giunta, che ella sia in D alla distanza di 90° da P, presenta la figura di un semicerchio colla convessità rivolta al Sole verso levante, e dicesi *Luna dicotoma*, o tagliata in mezzo. Nel suo progresso verso N la parte illuminata va sempre diminuendosi; talchè riducesi uno strettissimo segmento circolare, la cui circonferenza esterna è un semicerchio, l' interna una semiellisse alquanto stiacciata, che ha per grand' asse il diametro del semicerchio; e finalmente giunta in N tra 'l Sole, e la Terra, volge a questa la sua parte oscura, e perciò non si vede più dagli Abitanti della Terra per circa due giorni; cioè finchè avanzatasi verso B torna a presentare lo stesso segmento circolare rivolto in senso opposto; cioè verso ponente: riducesi nuovamente dicotoma in E; e piena nuovamente in P. Quando la Luna trovasi in N dicesi *in congiunzione*, o *nuova*; giacchè si suppone, che dalla congiunzione vada cominciando il suo giro. Alla distanza di 90° da N in E dicesi *nella prima quadratura*, o *nel primo quarto*; dicesi *in opposizione*, o *piena*, quando è in P alla distanza di 180° dalla congiunzione; finalmente *nella seconda quadratura*, o *nell' ultimo quarto*, quando ne è giunta alla distanza di 270° nel punto D. La retta SNTP, che dal centro del Sole passa per quei della Terra, e della Luna sì nella congiunzione, come nella opposizione, dicesi *linea delle sizigie*; dicesi *linea delle quadrature* la retta ETD condotta normalmente a questa per il centro della Terra nel piano dell' orbita lunare.

496. Ora partita la Luna dal punto N, o dalla congiunzione va d'occidente in oriente percorrendo la sua orbita, e ritorna al medesimo punto dell'orbita in 27 gi., 7 or., 43', 11", 36'''. Questo tempo si chiama *mese periodico*. Ma tornata in N non trova più in T la Terra, che per il suo moto annuo si è avanzata d'occidente in oriente per circa 29°; onde la Luna, dee percorrere questi 29° prima di raggiugner la Terra, e tornar nuovamente tra essa, e il Sole, o sia in congiunzione. E siccome in percorrere questi 29° spende 2 gi., 5 or., 51', 44"; così tra una congiunzione della Luna, e l'altra corrono 29 gi., 12 or., 44', 32"; tempo, che è detto *mese sinodico*. Pertanto circa 7 giorni dopo la congiunzione, o il novilunio la Luna si trova nella prima quadratura; si trova nell'opposizione, o nel plenilunio tra il XIV, e il XV; tra il XXII, e il XXIII nella seconda quadratura; e nel XXIX torna in congiunzione.

497. In tutto il corso della rivoluzione della Luna la parte illuminata ne è sempre la più vicina al Sole, l'oscura è sempre la più lontana. Ma la parte oscura non lo è sempre tanto, che non possa con qualche attenzione, e specialmente nelle notti ben chiare, vedersene tutto il disco con distinzione, e ciò, secondo l'opinione generalmente seguita, per la luce, che su di esso è riflessa dalla Terra. La luce solare come riflessa dalla Luna illumina l'emisfero terrestre opposto al Sole, così riflessa dalla Terra illumina l'emisfero lunare, cui non posson giungere i raggi diretti del Sole. Così si è spiegato da tutti questo fenomeno fino al dì d'oggi; ma un'altra spiegazione è stata modernamente messa fuori dal Leslie. Calcolando egli la quantità dei raggi, che la superficie della Terra può

secondo le sue idee rifletter sulla Luna, trova, che ella è si piccola da non bastar a produr l'effetto, che se le attribuisce. Perciò avendo dedotto da diverse considerazioni, che la Luna, come tutti i pianeti, siano corpi non già *riflettenti della luce solare*, ma *fosforescenti*; tali cioè, che percossi dalla luce del Sole prendono l'attività di scagliare luce sia loro propria, sia assorbita, crede, che il debolissimo chiarore della parte scura del globo lunare sia lo splendore spirante, o evanescente d'una fosforescenza, la cui forza si va estinguendo. Vedansi le idee singolari del Leslie su questo articolo in un opuscolo intitolato *Osservazioni sulla luce della Luna e dei pianeti*, che si trova tradotto nel T. 28 della Bibl. Universale (*pag.* 271); ma vedasi anche ciò, che contro questa spiegazione è notato nel T. 29 della stessa Bibl. Un. (*p.* 312), dove si osserva, che il tempo, in cui la parte oscura della Luna comincia a mostrarsi debolmente illuminata non è quello, in cui dovrebbe cominciare, se fosse vera l'ipotesi del Leslie. Ma comunque ciò sia, le osservazioni delle macchie sparse sulla superficie della Luna mostrano, che ella presenta alla Terra sempre la stessa faccia. Dal che si è dedotto, che ella rota intorno al proprio asse, e che compie nel tempo stesso la rotazione intorno al proprio asse, e la rivoluzione intorno alla Terra. Infatti egli è impossibile, che un uomo, per es., percorra la circonferenza d'un cerchio tenendo costantemente rivolta la faccia al centro, senza fare nel tempo stesso un intero giro sopra di se. Si nota per altro un piccolo cangiamento oscillatorio nella situazione del globo lunare, e nella posizione delle sue macchie, che sembrano talvolta più, talvolta meno lontane dai lembi; e la differenza arriva anche a $\frac{1}{7}$ della

larghezza del disco apparente. Questo sbilancio del globo lunare è chiamato dagli astronomi *Librazione*.

498. La rotazione diurna della Terra d' occidente in oriente produce una giornaliera apparente rivoluzione della Luna intorno alla Terra d' oriente in occidente, per cui gli Abitatori d' ogni parte della superficie terrestre la vedono levarsi, passare pel loro meridiano, e tramontare. Questa apparente rivoluzione chiamasi *giorno lunare*. Ma mentre la Luna apparentemente si rivolge d' oriente in occidente in un giorno, si avanza effettivamente d' occidente in oriente nella sua orbita per un certo numero di gradi. Quindi è, che in ciascun giorno il suo nascere, e il suo passaggio pel meridiano di un dato luogo ritardano d' una quantità di tempo, che varia alquanto, ma il di cui termine medio è 49'; talchè il giorno lunare determinato da due successivi passaggi della Luna per lo stesso meridiano, si considera eguale a 24 or., 49'. Infatti il piano verticale PO (*Fig.* 5) condotto per il polo del mondo, e per il centro della Luna, nel qual piano ella si trova passando oggi pel meridiano per es. di Pisa, fa un angolo OPO' di circa 13° coll' altro simil piano PO', in cui si troverà domani passando per lo stesso meridiano; onde il meridiano di Pisa terminata in 24 ore la sua rivoluzione, per ritrovar la Luna dovrà percorrer di più un arco di circa 13°; e nel percorrer quest' arco spende quel tempo, per cui il giorno lunare è più lungo del solare.

499. L' orbita lunare è inclinata all' ecclittica, e la interseca perciò in due punti, che diconsi *nodi*, talchè la Luna in ogni rivoluzione la traversa due volte. Il punto, in cui la traversa per andare verso il Nord, si chiama *nodo ascendente*, l' altro *descendente*; e la

retta tirata da un nodo all' altro è detta *linea dei nodi*. Ora nè l'inclinazione dell' orbita lunare è costante, nè i nodi ne son fissi. L'inclinazione è maggiore quando la Luna è nelle quadrature, minore quando è nelle sizigie; e la quantità media si calcola 5°, 8', 52". Si osserva poi, che se la Luna a una data epoca traversa l' ecclittica per es. nel primo punto dell' ariete, circa 18 mesi dopo la traversa nel primo punto dei pesci; cioè il nodo ha retroceduto per 30°, o per un segno; vale a dire si è mosso contro l' ordine dei segni per 30°, e quindi fa il giro retrogrado dell' intero zodiaco nel corso di 18 in 19 anni.

500. Ora se avvenga, che essendo il Sole in S, e la Terra in T (*Fig.* 4), la Luna in congiunzione nel punto N sia o nel piano, o molto prossima al piano ST dell' ecclittica, cioè in un nodo, o molto prossima ad un nodo; dovrà colla sua opacità impedire, che giungano sulla Terra i raggi, che partono da quella porzione del disco solare, che le corrisponde: la qual porzione sarà tanto più, o men grande, quanto più, o men grande sarà il rapporto del diametro apparente della Luna a quello del Sole: e quindi il Sole comparirà ecclissato agli Abitanti di quei punti della Terra, dove sarebber caduti i raggi solari così intercetti dalla Luna. Al contrario se la Luna sia nella opposizione in P; e nello stesso piano, o prossimamente con S, e T, la Terra impedirà, che i raggi solari vadano a illuminarla; onde ella resterà nell'ombra della Terra, o ecclissata. Ed ecco ond' hanno origine le ecclissi del Sole, e della Luna: ma anche su questo articolo consulteranno gli Astronomi quelli, che voglion notizie più estese, e più precise.

501. Poco diremo delle Comete, perchè la loro teorica è tuttora molto imperfetta. Sappiamo con certezza,

che son corpi, che girano intorno al Sole, come i pianeti; par certo, che essi riflettano la luce del Sole, giacchè i raggi, che esse tramandano han dati ad Arrago, e ad altri dei segni proprj della luce solare riflessa (*V. Bibl. Uni. T.* 34 *p.* 255); ma non abbiamo, che ipotesi sulla loro natura: tra le quali ipotesi la più ricevuta è quella di Herschel, che riguarda le comete come concrezioni prodotte dall' azione solare della *materia nebulosa*, da cui egli suppone esser composte le stelle così dette *nebulose.* Nè conosciamo precisamente, e generalmente la natura della curva, che descrivono. Alcune ravvolgonsi in orbite ellittiche; pare, che debban tornare a manifestarsi periodicamente, e che perciò possano le loro apparizioni presagirsi col calcolo. Per altro ben poche se ne conoscono, il di cui ritorno sia stato dimostrato completamente. La massima parte non son tornate, nè sapremmo assegnarne il motivo con precisione. Nulla pur sappiamo con certezza sulla cagione dello splendore, che ordinariamente le accompagna sotto la forma ora di coda, ora di barba, ora di capillizio. Il Sig. Lehmann nella sua Orazione inaugurale all'Università di Gottinga ha proposta un' ingegnosa spiegazione di questo fenomeno, e segnatamente della formazione della coda (*V. Bibl. Un. T.* 31. *p.* 179). Egli suppone, che le comete caudate rotino intorno al proprio asse, come la Luna, cioè presentando sempre lo stesso lato al centro dell'attrazione, vale a dire al Sole. Il La Place ha dimostrato (*Mech. Cel. L.* 5 *ch.* 2), che un pianeta per rotare in tal guisa dee avere nel lato rivolto al centro d' attrazione maggior massa, che nel lato opposto; e quindi il centro di gravità ne debbe essere tra il centro della figura, e il centro dell' attrazione, e segnatamente per le co-

mete, tra il céntro di figura del nucleo, ed il Sole. Ora le particelle, che costituiscono l'atmosfera delle Comete suppongonsi soggette ad una forza espansiva, e ad una forza di gravitazione tanto verso il nucleo, quanto verso il Sole. Quelle particelle dell' atmosfera, che sono dalla parte opposta al Sole, sono attratte da questo con forza minore di quella, con cui è attratto il nucleo; e quindi l'azione del nucleo sulle dette particelle sarà diminuita per l'azione della massa del Sole. Finchè questa differenza d'attrazione per la grandissima lontananza della Cometa dal Sole rimane insensibile, la forza espansiva, e l'attrazione del nucleo si fanno equilibrio, e tutte le parti dell' atmosfera debbono essere, e restare equidistanti dal nucleo. Ma quando per essersi la Cometa molto appressata al Sole la diminuizione dell' attrazione del nucleo divien più sensibile; la forza d'espansione prevale, ed allontana dal nucleo una porzione delle particelle atmosferiche situate nel lato opposto a quello, che guarda il Sole; e questa porzione forma la coda. Avvicinandosi la Cometa al *perielio* (massima vicinanza al Sole), si va rendendo più sensibile la detta diminuzione d'attrazione tra il nucleo, e la materia, che forma la coda; e quindi la coda si allunga. Oltrepassato il perielio, la coda si vede diminuire, e perchè dee diminuire la forza espansiva dell' atmosfera per la diminuita densità, perchè per la stessa diminuzione di densità le particelle più remote non rifletton la luce in copia sufficiente, perchè giunga a far impressione su nostri occhi. Allontanandosi poi la Cometa dal Sole, debbono aversi effetti contrarj a quelli, che provengono dall' avvicinamento; e perciò la coda va successivamente diminuendo, e svanisce.

Come si distaccano dal nucleo le parti dell' atmosfera, che sono nel lato più lontano dal Sole; così pure se ne distaccano quelle, che sono nel lato ad esso rivolto; ma queste se ne discostan meno, perchè, il centro di gravità del nucleo non coincidendo con quello della figura è più vicino alla superficie dell' atmosfera rivolta al Sole; e quindi agisce con maggior forza sulle particelle, che ivi si trovano, le quali perciò non posson allontanarsi tanto da formar una coda. Forse quindi ha origine o la barba, o il capillizio, o la più piccola coda, che talvolta si vede anche per la parte rivolta al Sole, come nella cometa del 1823, che avea due code quasi diametralmente opposte.

La maggior parte degli accidenti, che interessan la formazione della coda delle comete sono sufficientemente spiegati dal Lehmann cogli esposti principj, e per quanto mi pare, meglio, che dal Niccolet il quale nell' articolo *Comete* dell' Enciclopedia moderna la deduce dall' impulso de' raggi solari sulla materia vaporosa, che il calore fa sollevare intorno la Cometa (*V. Bibl. Un. T.* 34 *p.* 245.) e dal Milne, che ne ha data una poco dissimile spiegazione nel suo *Saggio sulle Comete* premiato dall' Università d' Edinburgo, e riferito nell'*Edinburg new phil. jour. n.* x, e nel T. 40 della Bibl. Un. I Curiosi potranno consultare i luoghi citati; e noi termineremo concludendo, che le comete, qualunque ne sia la precisa natura, son corpi appartenenti al nostro sistema mondiale, i quali girano intorno al Sole.

Teorica della gravitazione universale.

502. Ora tutto ciò premesso conviene avvertire, che le più esatte osservazioni astronomiche condussero il

Keplero a stabilire le tre seguenti leggi per il moto dei Pianeti attorno al Sole.

1.ª I pianeti si muovono in curve piane, e i loro raggi vettori descrivono intorno al centro del Sole aree proporzionali ai tempi, in cui son descritte.

2.ª Le orbite dei pianeti sono ellissi, che hanno in uno dei fuochi il centro del Sole.

3.ª I quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti intorno al Sole stan tra loro come i cubi dei grandi assi delle loro orbite, o delle medie distanze dal Sole.

Queste stesse leggi si applicano ancora al moto dei Satelliti intorno ai loro primarj.

503. La prima di queste leggi dimostra, che i pianeti primarj sono costantemente attratti verso il centro del Sole (351).

La seconda dimostra, che la forza centripeta dei pianeti, cioè la loro attrazione verso il Sole varia in ragione duplicata inversa delle distanze dal centro, cui è diretta (357).

504. La terza poi dimostra, che l'attrazione del Sole pei pianeti agisce con eguale energia su tutti all'unità di distanza (361). Questa forza non è varia pei varj pianeti, se non perchè ne son varie le distanze dal Sole. Talchè se tutti i pianeti si trovassero in quiete alla medesima distanza dal Sole, e abbandonati alla loro attrazione verso il centro di esso, se gli accosterebbero tutti per eguale spazio in egual tempo, cioè con velocità eguale. Dunque l'attrazione, che spinge i pianeti verso del Sole è respettivamente proporzionale alla loro massa.

505. Ciò, che si dice dei pianeti vuolsi pur dire delle Comete. Non è dimostrato dalle osservazioni, che tutte le leggi del Keplero convengano alle comete; ma

si sa, che lor conviene la prima, e quindi può dedursi, che dee pur convenir loro la terza. E per quanto non sia certo, che la traiettoria delle comete sia sempre ellittica (501), non può quindi revocarsi in dubbio, che la lor forza centripeta varj in ragion duplicata inversa delle distanze dal centro, perchè un proietto con una forza centripeta soggetta a tal legge può descriver non solo un' ellisse, ma qualunque sezion conica (356).

506. Quanto abbiam detto dei pianeti primarj rispetto al Sole si applica ai secondarj rispetto ai loro primarj. La proporzione costante tra le aree descritte dai loro raggi vettori, e i tempi, in cui son descritte, fa vedere, che sono attratti verso i centri dei lor primarj; così pure la figura ellittica più, o meno sensibile delle loro orbite, e il rapporto costante dei quadrati dei tempi periodici ai cubi delle medie distanze mostrano, che l' attrazione, cui son soggetti è proporzionale alla massa (504), e reciproca al quadrato delle distanze dal centro attraente.

507. I satelliti son pure attratti dal Sole nella stessa guisa, che i primarj, giacchè si muovono intorno di loro, come se essi fossero immobili, per quanto girino attorno al Sole. Se i satelliti non fossero attratti verso del Sole con quelle stesse leggi, con cui sono attratti i primarj, si manifesterebbero nei loro moti delle irregolarità, che le osservazioni non hanno scoperte.

508. Dunque i pianeti, le comete, i satelliti soffrono una stessa attrazione verso del Sole. Mentre i satelliti girano intorno al primario, il sistema del pianeta, e de' satelliti è trasportato da un moto comune nello

spazio, ed è ritenuto dalla medesima forza attorno al Sole.

Or poichè è legge costante della Natura, che la reazione è eguale, e contraria all' azione (70), egli è fuor di dubbio, che tutti questi corpi reagiscono sul Sole, e come ne sono attratti, così lo attraggono con una forza proporzionale alle loro masse, e reciproca al quadrato delle distanze.

509. E tal forza non si manifesta solo tra i corpi celesti, ed il Sole. Questi corpi si attraggono anche l' un l' altro; e le lor particelle si attraggono esse pure scambievolmente. Infatti la figura sferica, che hanno tutti i corpi celesti mostra, che le particelle ne sono riunite intorno ai respettivi loro centri da una forza, che a eguali distanze le sollecita egualmente verso questi punti. Si è poi osservato, che quando i corpi celesti si avviciuano tra loro, se ne turbano i moti più, o meno: e ciò non potrebbe accadere, se non esistesse tra essi una scambievole attrazione. E siccome gli Astronomi calcolandone gli effetti nell' ipotesi, che ella sia reciproca tra i detti corpi, e proporzionale direttamente alle masse, inversamente al quadrato delle distanze, trovano i resultati de' loro calcoli conformi alle osservazioni; così non resta dubbio, che essa vada realmente soggetta a queste leggi.

510. L' attrazione, che i corpi celesti esercitano gli uni sugli altri, non appartiene loro solamente in massa, ma è propria di ciascuna delle loro particelle elementari. Se il Sole non agisse, che sul centro della Terra senza attrarre particolarmente ognuna delle parti di essa, le acque dell' oceano dovrebbero esser soggette a delle oscillazioni sommamente più grandi, e ben diverse da quelle, che vi si osservano. Dunque l' attra-

zione tra la Terra, ed il Sole è il resultato delle azioni di tutte le loro particelle, che scambievolmente si attraggono in ragione delle masse respettive; e ciò, che si dice del Sole, e della Terra si applica per analogìa a tutti gli altri corpi celesti.

511. Ora questa attrazione, che i fenomeni della Natura manifestano tra i corpi celesti, è identica alla gravità dei circumterrestri. Realmente ha dimostrato il Newton, e dopo di lui anche con maggior precisione il La Place (*Exposition du systéme du Monde liv.* 4. *c.* 1), che identica alla gravità terrestre è la forza centripeta della Luna. Ecco come il Newton giunse a questa interessante scoperta (*Prin. Phil. Nat. lib.* 3. *prop.* 4).

La forza centripeta, che combinata colla tangenziale fa descrivere alla Luna in un dato tempo, per es. in 1' un arco infinitesimo della sua orbita sì poco eccentrica, che può prendersi fisicamente per circolare, rimanendo sola le farebbe percorrere nello stesso tempo il seno verso di quest' arco (321); il qual seno verso può considerarsi come eguale al quadrato dell' arco diviso pel diametro. Ora l' orbita lunare ha per raggio 60 semidiametri terrestri, ed è percorsa dalla Luna in 27 giorni, 7 ore, e 43', cioè in 39343'. Conosciuta dunque in piedi parigini (prendiamo tal misura, perchè è quella presa dal Newton) la lunghezza del raggio terrestre, si conoscerà qual numero di piedi parigini misuri l' orbita della Luna: il quoziente di questo numero diviso per 39343 darà la lunghezza in piedi d' un arco descritto dalla Luna in 1': il quadrato di questo quoziente diviso pel diametro dell' orbita lunare ne sarà il seno verso; e indicherà perciò lo spazio, che in detto tempo percorrerebbe la Luna, se lasciata in balìa

della sola forza centripeta, cominciasse a cadere verso la Terra. Il Newton trovò questo spazio eguale a circa 15 piedi parigini, e $\frac{1}{12}$. Ma la forza centripeta della Luna varia in ragione duplicata inversa delle distanze (357). Se dunque ella fosse presso la superficie della Terra, come ne sarebbe diminuita la distanza dal centro della Terra nella ragione di 60 : 1; così ne sarebbe cresciuta la forza centripeta nella ragione di $60^2 : 1$; cioè sarebbe divenuta 3600 volte maggiore; e quindi lo spazio, che essa descriverebbe in 1' sarebbe $(15 + \frac{1}{12}) \times 3600 = 54300$ piedi par. Ora questo è lo spazio, che presso la superficie della terra descrivono i corpi per il solo impulso della gravità in 1'; giacchè in 1" descrivono 15 $\frac{1}{12}$ pie. par., e debbon perciò in 1' = 60" descrivere uno spazio, che stia a quello :: 60^2 : 1 (263). Dunque la Luna per la sua forza centripeta descriverebbe presso la superficie della Terra in un dato tempo quel medesimo spazio, che per la gravità descrivono in esso tempo tutti i corpi circumterrestri.

512. Dunque possiamo concludere, che l'attrazione, cui va soggetta la luna, e per analogìa l'attrazione, che si manifesta tra tutti gli altri corpi celesti è identica alla gravità terrestre; e quindi siamo condotti a stabilire il gran principio o legge di Natura, che *Tutte le particelle della materia si attraggono scambievolmente in ragione diretta semplice delle masse, e duplicata inversa delle distanze*.

Diversi interessantissimi corollarj deduconsi da questo principio.

513. I. Data una superficie sferica BKG (*Fig.* 6) composta di parti attraenti in ragion diretta semplice della massa, duplicata inversa della distanza, un pun-

to materiale, o corpicciuolo *P* situato dentro di essa non risentirà alcun effetto dall' attrazione delle parti, che la compongono. In fatti sia primieramente situato nel centro. Siccome in questa situazione è equidistante da tutti i punti della superficie, così tutte le eguali particelle, onde essa risulta, lo attrarranno verso di se con eguale energia, e l' attrazione di ognuna distruggendosi dall' attrazione di quella, che le è diametralmente opposta, il corpo non ne risentirà alcun effetto. Sia ora il corpicciuolo *P* situato fuori del centro. Crescerà, è vero, l' attrazione di quelle parti, cui il corpicciuolo si avvicina, e scemerà quella delle parti, da cui si allontana: ma siccome corrispondentemente scema il numero delle parti, cha attraggono più, e cresce il numero di quelle, che attraggono meu fortementé; così si fa una compensazione, e l' effetto d' ogni attrazione riman distrutto. Realmente se si tirino per il punto P, in cui si suppone situato il corpicciuolo, le due rette AE, FB, che intersechino gli archi infinitesimi AB, EF; saran simili i triangoli EPF, APB, che hanno eguali gli angoli F, A appoggiati sopra un arco eguale, e gli angoli al vertice. Avremo dunque EF : AB :: PE : PB. Suppongansi EF, e BA diametri di due piccolissimi menischi tagliati sulla superficie sferica da rette, che passando pel punto P vengano a costituire due coni, i quali abbiano per basi i detti menischi, che possan fisicamente considerarsi come piani, o superficie circolari. Avremo $FE^2 : AB^2 :: EP^2 : PB^2$. Queste superficie attraggono per ipotesi il corpicciuolo *P* in ragione diretta semplice delle loro masse, e duplicata inversa delle distanze da esso. Perciò l' azione della superficie avente per diametro AB sta all' azione della superficie, che

ha per diametro EF $:: \frac{AB^2}{BP^2} : \frac{EF^2}{EP^2} :: \frac{PB^2}{PB^2} : \frac{EP^2}{EP^2} :: 1 : 1$.
Ambe le superficie adunque attraggono il corpicciuolo *P* con egual forza in direzioni opposte, e perciò niun effetto esso risente dalle loro attrazioni. Questo discorso si applica a tutte le parti, che compongono l' intera superficie sferica. Dunque si può stabilire, che un corpo posto dentro la medesima non risente effetto alcuno dall' attrazione delle sue parti.

514. II. Passiamo ora a considerare il caso, in cui un corpo *P* è fuori della data superficie sferica a qualunque distanza PA (*Fig.* 7). Tirata la linea PB, che passi pel centro della sfera, è chiaro, che l' attrazione si eserciterà secondo questa linea solamente, perchè tutto è eguale attorno di essa, cioè si distruggono tutte scambievolmente le attrazioni oblique. Ora facilmente si dimostra, che l' attrazione sofferta dal corpuscolo verso il centro della sfera segue la ragione duplicata inversa della sua distanza dal detto centro. In fatti le due eguali superficie sferiche AHKB; ahkb attraggano i corpicciuoli *P*, *p* posti fuori di esse. Condotte le rette PHK, phk, ed estremamente vicine a queste le PIL, pil, che taglino gli archi respettivamente eguali HK, hk, ed IL, il, e per i centri S, s le PSB, psb; si tirino le normali SD, sd; SE, se sopra PK, pk, e PL, pl; e le normali IQ, iq; IR, ir sopra le PB, pb, e le PK, pk. Essendo DS = ds; SE = se, ed estremamente piccoli, o evanescenti gli angoli KPL, kpl; potranno considerarsi come eguali le PE, PF; le pe, pf; e le DF, df. Ora pei triangoli simili PIR, PFD, pir, pfd abbiamo PI : PF :: RI : DF; e pf : pi :: df (= DF) : ri : e perciò moltiplicando una per l' altra le precedenti analogìe, avremo PI $\times$ pf : PF $\times$ pi ::

RI : ri ; e siccome gli archi infinitesimi HI, hi si confondono colle loro tangenti ; così potremo prenderli per le tangenti stesse, ed avremo i triangoli infinitesimi RIH, rih simili, perchè hanno gli angoli R, r retti, e gli angoli H, h eguali, essendo misurati da archi eguali HK, hk, onde si avrà

RI : ri :: arc. HI : arc. hi ; e perciò

(1) PI $\times$ pf : PF $\times$ pi :: arc. HI : arc. hi.

Parimente per la somiglianza dei triangoli PQI, PES ; pqi, pes, abbiamo PI : PS :: IQ : SE ; e ps : pi :: se (= SE) : iq ; onde

(2) ps $\times$ PI : PS $\times$ pi :: IQ : iq ;

e moltiplicando tra loro le due proporzioni (1), e (2), starà PI^2. pf. ps : pi^2. PF. PS :: arc. IH. IQ : arc. ih. iq, cioè come la superficie circolare descritta dalla rivoluzione dell' arco IH intorno a PS alla superficie descritta dalla rivoluzione dell' arco ih intorno a ps. Ma le forze F, f, con cui queste superficie attraggono i corpicciuoli P, p secondo le linee PI, pi, che tendono verso di esse, sono per ipotesi tra loro come queste superficie medesime divise per PI^2 ; e pi^2. Dunque

$$F : f :: \frac{\text{arc. IH . IQ}}{\text{PI}^2} : \frac{\text{arc. hi. iq}}{\text{pi}^2} :: \text{pf . ps : PF . PS.}$$

Ora risolvendo la forza F, che agisce secondo PI, in due, di cui una G agente secondo PS tenda al centro S ; e parimente risolvendo la forza f in due, una delle quali g agente secondo ps tenda al centro s, avremo $F : G$ :: PI : PQ :: PS : PF ; $f : g$ :: pi : pq :: ps : pf per la somiglianza dei triangoli PIQ, PSF ; piq, psf. E sostituendo invece di F, e di f i valori ad esse proporzionali pf $\times$ ps ; PF $\times$ PS, avremo pf . ps : G :: PS : PF ; PF . PS : g :: ps : pf ; e quindi

$G = \frac{PF \, . \, pf \, . \, ps}{PS}$; $g = \frac{pf \, . \, PF \, . \, PS}{ps}$; $G : g : PF \, . \, pf \times ps^2 : pf \, . \, PF \times PS^2 :: ps^2 : PS^2$. Che è quanto dire, la forza, con cui il corpicciuolo P è attratto verso il centro S dalla superficie circolare generata dall' arco HI per la rivoluzione del semicerchio AKB intorno al diametro AB sta alla forza, con cui è attratto il corpicciuolo p verso il centro s dalla superficie generata dall' arco hi per la rivoluzione del semicerchio akb intorno al diametro ab, in ragion duplicata inversa delle distanze da questi centri.

Nella stessa maniera può dimostrarsi, che le forze, con cui le superficie generate dalla rivoluzione degli archi KL, k l attraggono i corpicciuoli P, p sono come $ps^2 : PS^2$, e che nella medesima ragione sono le forze attraenti di tutte le superficie circolari, in cui l' una, e l' altra superficie sferica si può dividere prendendo sempre sd = SD; se = SE. Dunque *componendo* le attrazioni delle intere superficie sferiche per i detti corpiccioli sono nella stessa ragione.

515. Quindi è chiaro, che un corpicciuolo P situato fuor di una sfera, la cui massa si consideri = 1, è attratto dalla sfera con una forza reciproca al quadrato della sua distanza dal centro di essa. Poichè intendendo, che la sfera sia divisa in un numero infinito di superficie sferiche concentriche, le attrazioni, che P soffrirà da tutte le superficie saranno reciproche al quadrato della distanza del corpo dal centro. Onde *componendo* l' attrazion totale del corpuscolo verso la sfera sarà nella stessa ragione.

516. Dunque dicendo d la distanza di un corpicciuolo dal centro S di una sfera composta di materia omogenea attraente come sopra, che abbia la massa

M; G l' attrazione di questa sfera pel dato corpicciuolo; g l' intensità dell' attrazione di un' altra sfera presa per unità di massa all' unità di distanza, avremo $G : g :: \frac{M}{d^2} : \frac{1}{1}$; $G = \frac{gM}{d^2}$. Ma questa stessa espressione denota la forza attraente di un punto materiale che abbia la massa M, e sia collocato in S. Può dunque stabilirsi, che

« *L' attrazione di un corpo sferico, ed omogeneo sopra un punto materiale posto fuori di esso è la medesima, che se la massa intera di questo corpo fosse riunita nel suo centro.* »

E la verità del teorema sussiste anche quando il corpo non sia omogeneo, purchè per altro sia composto di strati sferici concentrici, che siano omogenei; perchè l' attrazione di ogni strato è la stessa, che se tutta la materia attraente, da cui resulta, fosse riunita nel respettivo centro; e l' attrazione del corpo intero è eguale alla somma delle attrazioni di tutte le sue parti.

Qualora si rifletta, che condensandosi nel centro di una sfera tutta la materia, che la compone, di quanto si accresce la distanza dal corpicciuolo esterno di quelle parti, che son comprese nell' emisfero anteriore, si diminuisce d' altrettanto quella delle parti comprese nell' eguale emisfero posteriore; ben s' intende, che dee aversi una compensazione tra le attrazioni parziali, che crescono, e quelle, che scemano, onde l' attrazion totale dee restare invariata.

517. Dal precedente teorema si deduce,

1.° Che le sfere materiali posson considerarsi come punti pesanti.

2.° Che nel calcolare l' attrazione reciproca di due

sfere, bisogna prendere la distanza tra i loro centri, e non tra le loro superficie.

518. III. Un corpicciuolo *P* (*Fig.* 6) situato nello interno di una sfera ABGK è attratto con una forza proporzionale alla sua distanza dal centro C di essa sfera. Poichè supponendo la zona KBGFPQZ composta di un numero infinito di superficie concentriche, ed applicando a tutte le parti di ognuna di queste superficie il discorso fatto sopra (513) per la superficie KBF, concluderemo, che il corpo P non risente attrazione alcuna da tutta questa zona: onde è attratto solo dalla sfera interna PQZ, sulla cui superficie esso si trova, con una forza proporzionale alla massa, e reciproca al quadrato della distanza dal centro C; cioè con una forza espressa per $\frac{M}{PC^2}$, se M indichi la massa di questa sfera. Ma in una sfera omogenea la massa è proporzionale alla solidità, e questa al cubo del raggio. Dunque il corpo è attratto da una forza espressa per $\frac{PC^3}{PC^2} = CP$, cioè da una forza proporzionale al raggio della sfera attraente.

519. Siccome la zona esterna nulla influisce sull' attrazione della sfera interna per il corpicciuolo, supponiamo, che ella sia tolta. Il corpicciuolo resterà in tal caso collocato sulla superficie della sfera attraente; e poichè ne soffrirà sempre la medesima attrazione, si potrà stabilire, che *un corpo situato sulla superficie d' una sfera è attratto con una forza proporzionale al raggio della sfera medesima*.

520. IV. Se una sfera roti intorno al proprio asse, e in conseguenza tutte le sue parti, e i corpi, che situati presso la sua superficie rotano insieme con essa,

concepiscano una forza centrifuga, l' effettiva attrazione di questa sfera su detti corpi sarà eguale alla differenza tra l' attrazione, che ella eserciterebbe, se fosse in quiete, e la forza centrifuga, giacchè quella tende ad avvicinare i corpi al centro, questa ad allontanarneli.

E di qui è, che

1.° La forza centrifuga essendo massima sull' equatore di una sfera, che roti intorno all' asse, e decrescendo verso i poli, dove si riduce minima; l' attrazione sarà massima ai poli, e decrescendo successivamente si ridurrà minima all' equatore.

2.° Se la materia, di cui la sfera è composta possa obbedire alla forza centrifuga; ella si solleverà all' equatore, e la sfera si cangerà in una sferoide compressa ai poli. Onde i corpi, che trovansi sull' equatore saranno più distanti dal centro, che quei situati ai poli, e perciò questi risentiranno più di quelli l' attrazione della sferoide.

521. V. La gravità terrestre essendo un caso particolare della gravitazione universale (512), è soggetta alle medesime leggi.

Quindi si può stabilire,

1.° Che i gravi sono attratti dalla Terra sensibilmente sferica verso il suo centro con una forza proporzionale alla loro massa, e reciproca al quadrato delle loro distanze da detto centro.

2.° Che i gravi si attraggono scambievolmente con quelle leggi stesse, con cui sono attratti verso il centro della Terra.

522. 3.° Che rotando la Terra intorno al proprio asse, la gravità g sarà eguale all' eccesso dell' attrazione G, di cui è dotata tutta la massa terrestre, sulla forza

centrifuga. Talchè la forza centrifuga essendo $\frac{4\pi^2 r}{T^2}$, se r sia il raggio dell' equatore, T il tempo della rivoluzione della Terra intorno al suo asse (364); avremo per esprimer la gravità all' equatore la formula generale $g = G - \frac{4\pi^2 r}{T^2}$.

Essendo pertanto $\pi = 3, 1415926$; $r = 6376466$ metri; $T =$ giorni 0,99727 = 86164'', se questi numeri si sostituiscano in luogo di π, r, T, avremo per resultato 0,0339088; numero, che esprimerà la ragione della forza centrifuga sull' equatore della Terra all' unità di forza, cioè ad una forza acceleratrice costante capace di produrre in 1'' una celerità eguale ad un metro. Or siccome il rapporto della gravità sull' equatore a questa stessa unità di forza è espresso per 9, 78 metri, giacchè questo è il doppio dello spazio, che i gravi percorrono sull' equatore nel primo minuto secondo della loro caduta nel vuoto; così il rapporto della forza centrifuga alla gravità sull' equatore sarà espresso per 0, 0339088: 9, 780000 = 0, 003467 : 1 = 1 : 288 prossimamente; onde la forza centrifuga = $\frac{g}{288}$. Perciò $g = G - \frac{g}{288}$; $G = \frac{289g}{288}$; e dividendo per 289, $\frac{g}{288} = \frac{G}{289}$. Dunque la forza centrifuga all' equatore non è, che circa $\frac{1}{289}$ della gravità, che avrebbe luogo, se la Terra fosse in quiete; abbiamo cioè $\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{G}{289}$.

Se la celerità di rotazione della Terra crescesse, il tempo T diminuirebbe, e la forza centrifuga differirebbe meno dalla gravità G. E poichè $17^2 = 289$;

basterebbe, che la celerità di rotazione della Terra crescesse 17 volte, perchè sull' equatore la forza centrifuga si rendesse eguale alla gravità, e i corpi abbandonati a se stessi, anzi che cader sulla terra restassero in equilibrio.

523. La forza centrifuga diminuisce dall' equatore verso il polo in ragione presso a poco del coseno di latitudine; in questa ragione decrescendo i raggi dei paralleli all' equatore. D' altronde l' angolo, che la direzione della forza centrifuga, che è la prolungazione dei raggi dei detti paralleli (329), fa colla direzione della gravità, o coi raggi terrestri, siccome è alterno, e perciò eguale all' angolo di latitudine; così va aumentandosi dall' equatore ai poli. Di qui è, che la forza centrifuga decomposta secondo la direzione della gravità, cioè quella porzione della forza centrifuga, che direttamente si oppone alla gravità, va corrispondentemente diminuendo, giacchè eguaglia il prodotto della intera forza nel coseno di detto angolo (131). Dee dunque la gravità crescere dall' equatore verso i poli. Realmente l' esperienze fatte col pendolo nelle diverse latitudini hanno mostrato, che la gravità cresce, e scema colla latitudine. Ma la diminuzione della gravità indicata da queste sperienze si trova maggiore di quel, che dovrebbe essere, se la sola forza centrifuga ne fosse la cagione; poichè in tal caso l' eccesso della gravità ai poli, dove la forza centrifuga è nulla, sulla gravità all' equatore, dove ella è massima, sarebbe secondo il calcolo fatto sopra (522) $\frac{1}{289}$ della gravità media terrestre, e in fatto si trova eguale a $\frac{1}{176}$ (297). Forse questa differenza tra i resultati dell' esperienza, e del calcolo nasce in parte dal non esser la gravità

diretta verso un sol punto, resultando dalle forze attraenti di tutte le particelle della Terra.

524. Le particelle terrestri situate verso l'equatore avendo minor gravità di quelle, che sono verso i poli, queste debbono tendere verso il centro della Terra con maggior forza di quelle; e quindi per l'equilibrio la Terra avrà dovuto comprimersi ai poli, sollevarsi all'equatore, prender cioè la figura di una sferoide compressa ai poli, elevata all'equatore (520). L'osservazione ha confermato ampiamente questo resultato del ragionamento, dimostrando la misura dei gradi del meridiano, che tale è precisamente la figura della Terra.

Ora per questa configurazione della Terra i corpi situati sull'equatore ne son più distanti dal centro di quei, che trovansi presso dei poli. Debbon dunque i secondi esser più attratti, che i primi corrispondentemente a questa minor distanza: ed ecco un'altra ragione, che unita alla diminuzione della forza centrifuga contribuisce all'aumento della gravità verso i poli.

Del resto queste variazioni della gravità, e la figura sferoidica della Terra indicando nelle parti di essa una forza centrifuga, somministrano una luminosa riprova di fatto del moto, con cui essa va continuamente rotando intorno al suo asse d'occidente in oriente. Una simil conferma di fatto ne dettero coll'esperienza il Guglielmini in Bologna, e l'Henzerberg in Dusseldorf mostrando, che un corpo in circostanze opportune lasciato in balìa della gravità a grande altezza al di sopra della Terra non cade precisamente per una direzione verticale, ma è trasportato alquanto verso oriente dalla celerità di rotazione, che esso ha maggiore, che la superficie terrestre, perchè il punto, da cui parte è più di quella distante dall'asse, intorno al quale si fa

la rotazione (V. *Guglielmini Opusc. de diurno terræ motu experimentis confirmato*).

* 525. VI. Siano nello spazio tre corpi sferici S, T, L dotati di una forza reciproca d' attrazione agente secondo la legge stabilita sopra (512). Sia S moltissimo maggiore di T; T molto maggiore di L. Questo descriva un' orbita OPCL intorno a T, che ne descrive una simile PTL intorno ad S; talchè il sistema delle due sfere T, L si aggiri intorno ad S (*Fig.* 8).

È chiaro, che se il corpo S eserciti un' attrazione sensibilmente eguale sopra T, ed L, e secondo linee parallele, la loro scambievole attrazione, e il moto relativo, che ne risulta, non sarà in modo alcuno perturbato; perchè le relazioni tra' corpi di un sistema non si alterano per un' azione comune a tutto il sistema. Ma se avvenga, che S agisca sopra uno de' due corpi più, che sull' altro, la differenza delle due attrazioni altererà l' attrazione, che ha luogo tra T, ed L; e quindi sarà perturbato il moto, che da essa proviene.

Ora a eguale distanza da S le sfere T, ed L ne sono attratte con eguale energìa (504), qualunque sia la loro massa, e non si ha differenza tra l' attrazione sofferta da esse, se non si abbia una sensibile differenza nelle loro respettive distanze dalla sfera attraente S.

Se dunque la distanza tra S, ed il sistema delle sfere T, L possa riguardarsi come infinita, tale cioè, che le differenze delle respettive distanze di T, e di L siano impunemente trascurabili rispetto a quella, S attrarrà T, ed L, in qualunque posizione esse si trovino, con forze sensibilmente eguali, e secondo direzioni parallele; talchè il loro moto relativo non verrà in modo alcuno alterato da questa azione, che loro sarà comune.

Ma se la distanza tra S, ed il sistema T, L, per quanto sia grande, non possa riguardarsi come infinita, essendo notabili le differenze tra le distanze, che nelle diverse situazioni relative delle sfere T, ed L passano respettivamente tra esse, ed S; la sfera S agirà inegualmente, e secondo differenti direzioni sulla sfera T, e sulla sfera L, e da

questa diversità d' azioni risulterà una *forza perturbatrice* eguale alla loro differenza, che produrrà nell' orbite, e nei moti delle sensibili ineguaglianze dipendenti dalle posizioni respettive di *S*, di *T*, e di *L*.

* 526. Una forza perturbatrice di tal genere si manifesta nel nostro Sistema planetario, e vi produce dei fenomeni molto importanti. Tra questi debbono principalmente rammentarsi

I. Le ineguaglianze, o perturbazioni del moto dei Satelliti, e segnatamente della Luna.

Per dare un cenno del modo, onde si generano queste ineguaglianze, sia *L* la Luna, *T* la Terra, *S* il Sole; e primieramente siano i centri di *S*, *T*, *L* nella linea SCO delle sizigie. Se *L* sia nel punto C *in congiunzione col Sole*, sarà più attratta da *S* di quel, che lo sia *T*; quindi per la forza perturbatrice si diminuirà la gravità, o la tendenza di *L* verso *T*. Se poi *L* sia in O *in opposizione col Sole*, *T* sarà attratta da *S* più, che *L*; e perciò si diminuirà la gravità, o la tendenza di *T* verso *L*; onde tanto nell' uno, che nell' altro caso la scambievol tendenza tra *L*, e *T* resterà diminuita, e presso a poco della medesima quantità.

Che se *L* sia in P, cioè in quadratura, *S* l' attrarrà obliquamente; ed è chiaro, che decomponendo questa attrazione in due, di cui l' una sia parallela, ed eguale, e l' altra normale all' attrazione di *S* su *T*, la forza perturbatrice è questa seconda, e che essa spingendo *L* verso *T* secondo il raggio vettore ne accresce la reciproca tendenza. Gli Astronomi calcolano, che questo aumento non è, che la metà della diminuzione nelle sizigie. Dunque nel corso della rivoluzione di *L* attorno a *T* in alcune posizioni di *L* scemando, in altre crescendo la tendenza, o l' attrazione tra *L*, e *T* per le azioni di *S* sopra *L*, ne risulta una forza media perturbatrice diretta secondo il raggio vettore, che ne diminuisce la gravità. In virtù di questa forza perturbatrice la sfera *L* resta sostenuta a una distanza da *T* maggiore di quella, a cui la sosterrebbe l' intera sua gravità. Il settore, che il raggio vettore ne descrive in un dato tempo intorno a *T* non vien alterato, perchè la forza perturbatrice è di-

retta secondo il raggio medesimo, ma è bensì diminuita la celerità effettiva, ed il moto angolare di *L*.

* 527. Secondariamente sia *L* in B tra P, e C, cioè in un punto intermedio tra la linea delle quadrature, e quella delle sizigie. Siccome *T* è più lontana, che *L* da *S*; così *L* sarà più attratta, e perciò, se la linea ST esprima l' attrazione di *S* per *T*, dovrà BS prolungarsi, per es. in D, onde poter indicare con questa linea l' attrazione di *S* per *L*. Ora se si formi il parallelogrammo RF, che abbia BD per diagonale, e il lato BF eguale, e parallelo a TS, è chiaro, che la forza rappresentata da BF non può produrre variazione alcuna nel moto di *L*; e la forza perturbatrice sarà quella sola, che è espressa per BR. Questa, essendo obliqua al raggio vettore BT, si risolverà nelle due scambievolmente normali BM, BN, di cui la prima sarà nella direzione del raggio vettore. Essendo ottuso l' angolo RBT, la forza BM produrrà una diminuzione nella gravità di *L*, e la BN accelererà, o ritarderà il moto di *L*, secondo che essa anderà accostandosi, o scostandosi dalla linea delle sizigie; e i settori non saranno esattamente proporzionali ai tempi, in cui son descritti. Considerando successivamente tutte le posizioni di *L* tra P, e C, se si faccia in ognuna la medesima costruzione per risolvere la forza perturbatrice, si troverà, che la forza BN maggiore, o minore ne' diversi punti altera sempre il moto di *L*; ma che la forza BM talvolta è nulla, talvolta diminuisce, talvolta accresce la gravità di *L*, secondo che la forza perturbatrice fa un angolo retto, o ottuso, o acuto col raggio vettore. Gli Astronomi osservano di fatto nel moto della Luna le ineguaglianze, che i precedenti ragionamenti dimostrano doversi produrre, oltre alcune altre, che possono dedursi dai medesimi principj.

* 528. II. Il moto de' nodi della Luna.

Se la Luna girasse intorno alla Terra nel piano dell' ecclittica, cioè se il piano dell' orbita lunare coincidesse col piano dell' ecclittica; l' azione del Sole, che si esercita in questo piano, non potrebbe tirarnela fuori. Ma, come abbiamo altrove osservato (499), ella si muove in un' orbita LAN (*Fig.* 9), che è inclinata al detto piano NSD. Il Sole adunque situato in un punto S di questo piano attira

continuamente la Luna verso di esso, in qualunque punto della sua orbita ella si trovi. Per lo che mentre ella dopo di aver descritto l' arco LA, per es., sta per trascorrere l'altro AB, essendo contemporaneamente affetta dalla forza, che la spinge per detto arco, e dalla forza perturbatrice solare, che la tira per AE, deflette alcun poco, e percorre con moto composto l' arco AC.

Nasce da ciò, che

1.° La Luna non rimane costantemente nello stesso piano LN, ma successivamente cangia piano, cioè va successivamente passando in altri piani AM, ec. Gli Astronomi per rappresentare metodicamente questi cangiamenti, suppongono la Luna situata sempre nello stesso piano, o nella stessa orbita, la quale per altro cangi sito, passi cioè dal piano LN nel piano AM, ec. Ora siccome l' angolo AMD è diverso dal primo LND, così per questi passaggi varia l' inclinazione dell' orbita lunare al piano dell' ecclittica. Perciò il piano dell' orbita lunare va successivamente tagliando il piano dell' ecclittica in diversi punti da N verso M, cioè i nodi della Luna vanno successivamente muovendosi da N verso M *contro l' ordine dei segni*, o sia d' oriente in occidente.

Il cangiamento d' inclinazione dell' orbita lunare all' ecclittica è periodico, e non si accumula, giacchè allorquando L è passata al di sotto del piano ND, l' azione di S l' obbliga a inclinarsi in senso opposto; e perciò si rimette come era. Non così il moto dei nodi. La lor posizione dee per la forza perturbatrice del Sole continuamente cangiarsi secondo una direzione contraria alla direzione del moto della Luna, o in una direzione retrograda. E realmente abbiamo notato sopra (499), che fa un' intera rivoluzione retrograda, cioè percorre contro l' ordine dei segni l' intera ecclittica nel corso di circa 18 in 19 anni.

* 529. III. La Precessione degli equinozj.

Il moto retrogrado dei nodi della Luna dee sempre aver luogo, finchè il Sole può esercitare una forza perturbatrice sulla Luna, per quanto varj la distanza fra essa, e la Terra; talmente che quand' anche la Luna si riducesse contigua alla Terra, e insiem con essa facesse la sua rivoluzione in-

torno all' asse terrestre in 24 ore, sempre la forza perturbatrice produrrebbe un moto ne' nodi di lei. Ciò, che si dice della Luna potrebbe dirsi ancora di un complesso di lune, che situate intorno all' equatore della Terra formassero come un anello circomposto al medesimo, e dalla figura di una sfera riducessero la Terra alla figura di una sferoide elevata all' equatore. Essendo notabile la ragione della distanza di questo anello dal centro della Terra alla distanza della Terra dal Sole, si avrebbe sempre una forza perturbatrice, che produrrebbe un moto nei nodi di questo anello. E se questo anello fosse stabilmente unito alla Terra, il moto di esso si comunicherebbe alla Terra, e l' equatore ne sarebbe obbligato a girare verso il Sole; e quindi la sua intersezione coll' ecclittica, o i suoi nodi avrebbero un moto retrogrado analogo a quello dei nodi lunari. Quello poi, che si dice dell' azione del Sole dee dirsi a più forte ragione d' un' altra sfera attraente, che fosse più vicina alla Terra. Questa sfera dovrebbe eccitare essa pure una rotazione nei nodi dell' anello circomposto all' equatore terrestre.

Ora effettivamente esiste intorno all' equatore della Terra questo anello. Poichè la Terra essendo una sferoide elevata all' equatore, e compressa ai poli, è effettivamente composta di una sfera avente per diametro la distanza tra i poli, e di un anello, che ricuopre questa sfera, ed ha la maggior grossezza all' equatore della sferoide. Oltre al Sole poi agisce su questo anello la forza attraente della Luna. Pertanto l' equatore terrestre è inclinato ai piani dell' ecclittica, e dell' orbita lunare, e perciò inclinato ai medesimi piani è pure l' anello, che lo ricuopre. Il Sole dunque, e la Luna specialmente, che è più vicina, debbono esercitare lateralmente su questo anello una forza perturbatrice, ed eccitar così nella Terra un tal moto, per cui l' asse dell' equatore vada rotando intorno ad un asse parallelo a quello dell' ecclittica, onde i punti, in cui esso equatore taglia il piano dell' ecclittica, retrocedano precisamente come i nodi lunari, sebbene con una lentezza moltissimo maggiore. Ora questi punti sono i punti equinoziali: dunque per la forza perturbatrice, con cui il Sole, e la Luna ancor più attirano lateralmente l' anello circomposto

all' equatore terrestre, i punti equinoziali retrocedono continuamente; e quindi le stelle vanno continuamente acquistando maggior longitudine, e gli equinozj anticipano, come abbiamo notato sopra (482, 492). Il Newton fu il primo a dedurre dall' accennata cagione la precessione degli equinozj; ma per verità non con troppa esattezza. Deesi al Sig. D' Alembert la piena, ed esatta spiegazione di questo fenomeno.

* 530. IV. La Nutazione dell'asse terrestre.

L' annua retrogradazione de' punti equinoziali, o la precessione degli equinozj per 50", 20''' è prodotta, come abbiam visto, dalle azioni lateralmente esercitate dal Sole, e dalla Luna sulla parte elevata della sferoide terrestre. Il calcolo dimostra, che deesi al Sole la retrocessione per circa 15", e il resto alla Luna. Ma questa non trovandosi sempre in un piano egualmente inclinato rispetto all' equatore, e non sempre ad egual distanza dal medesimo per cagione del moto periodico de' suoi nodi; l' obliquità, e le direzioni dell' attrazione lunare sulle parti dell' equatore debbono periodicamente diversificare ne' diversi anni: e quindi ben si comprende, che dee nascere una periodica ineguaglianza nella precessione, e il periodo ne dee corrispondere a quello della rivoluzione dei nodi lunari. Realmente il Bradley scoperse nel moto della precessione una ineguaglianza, in forza della quale si vede, che il polo dell' equatore terrestre descrive d' oriente in occidente nel periodo di circa 18 anni un' ellisse, il cui asse maggiore è di 18"; il centro è nel luogo medio di esso polo, che se ne allontana per 9" ora dall' una, ora dall' altra parte; e presenta così il fenomeno indicato dagli Astronomi colla parola *Nutazione*.

* 531. IV. Il flusso, e riflusso del mare.

La massima parte della superficie della Terra è ricoperta di acqua. Il raggio della Terra ha una ragione molto notabile alla distanza tra il centro di essa, e quello della Luna; e per quanto sia molto piccola, non è però infinitesima la ragione, che detto raggio ha alla distanza del Sole. La Luna dunque, ed anche il Sole debbono attrarre più fortemente, che il centro della Terra le acque, che ne ricuoprono la superficie, debbono cioè esercitare una forza per-

turbatrice su queste acque, che saran perciò costrette a sollevarsi, ed a circostanze pari d' altronde, la loro elevazione dovrà esser proporzionale alla intensità di detta forza, e variare come essa varia. Questa intensità dipende principalmente dalla posizione relativa della Terra, della Luna, e del Sole, e dee perciò specialmente variare nelle seguenti circostanze, e nelle seguenti maniere.

* 532. I. Quando la Luna agisce più direttamente sulle acque, e quando è loro più vicina, maggiore debbe essere l' intensità della forza perturbatrice. Quindi

1.° La Luna passando pel meridiano esercita la massima azione giornaliera sulle acque sottoposte. Quelle situate nell' emisfero più prossimo alla Luna (che si dicono *in congiunzione*) ne sono attratte più, che il centro della Terra; meno, che il centro della terra ne sono attratte quelle, che situate nell' emisfero opposto diconsi *in opposizione*. Dunque tanto nell' uno, che nell' altro emisfero si diminuisce sotto il meridiano la scambievol gravitazione tra la Terra, e le acque, che la ricuoprono, le quali perciò si scosteranno dal centro, e si alzeranno. D' altronde le acque situate a 90° di distanza dal meridiano, o *nelle quadrature* sono spinte verso il centro della Terra dalla forza perturbatrice decomposta normalmente alla linea delle sigizie; come notammo sopra (526); e nell' accostarsi a quello viemaggiormente obbligano a sollevarsi le acque sottoposte al meridiano in ambi gli emisferj. Dunque quando la Luna è nel meridiano debbono sollevarsi le acque sottoposte al meridiano medesimo; deprimersi quelle, che ne sono alla distanza di 90°, o nelle quadrature.

Ma per la rotazione della Terra sul suo asse, quei luoghi, dove le acque si sono sollevate, dopo 6 ore trovansi a 90° di distanza dal dato meridiano, o nella prima quadratura. Si aumenta in tal caso per la forza perturbatrice della Luna la loro tendenza verso il centro della Terra, e sono costrette a deprimersi, mentre si sollevan quelle, che si trovano sotto al meridiano, in cui è la Luna.

Dunque nel tempo, che scorre tra due passaggi della Luna per un meridiano (che dicesi *giorno lunare*) le acque debbono in tutti i luoghi della Terra due volte sollevarsi, e

due volte deprimersi. In ciò consiste il *flusso*, e *riflusso* del mare, detto altrimenti la *marea*.

Ciò, che abbiam detto non si applica alle acque molto remote dall' equatore, e prossime ai poli. Queste essendo sempre come in quadratura con la Luna, che non oltrepassa i tropici, debbono star sempre depresse.

Le acque elevate sotto il meridiano, in cui è la Luna allontanandosene pel moto diurno della Terra, onde passare dalla congiunzione, o dall' opposizione alla prima, o alla seconda quadratura, sono alquanto attratte dalla Luna, ed obbligate a refluire alquanto verso il meridiano. In questo stesso tempo accorrono in senso opposto le acque dalla seconda quadratura verso la congiunzione, e dalla prima verso l' opposizione.

Si hanno dunque tra la congiunzione, e la prima quadratura, e tra l' opposizione, e la seconda quadratura due correnti in senso opposto, per l' azione delle quali le acque sono obbligate a sollevarsi più ancora di quel, che porterebbe la sola diminuzione della lor gravità. Quindi è, che la massima elevazione dell' acque non si avrà nel momento del passaggio della Luna pel meridiano, ma due, o tre ore dopo. Ciò dipende anche in gran parte delle molte cagioni, che concorrono a ritardare il moto dell' acque, quali sono l' adesione, che alcun poco ne tiene unite le parti; l' attrito, che soffre, gli ostacoli, che incontra, ec.

2.° A circostanze pari l' elevazion debbe esser maggiore nel perigeo, che nell' apogeo della Luna, cioè nella minima, che nella massima distanza della Luna dalla Terra.

* 533. II. Quando le azioni della Luna, e del Sole sulla Terra sono cospiranti, la forza perturbatrice debbe avere la massima intensità; la minima, quando queste due azioni sono in opposizione. Quindi

Poichè nelle sizigie cospira l' azione del Sole con quella della Luna, l' elevazione dell' acqua, a circostanze pari d' altronde, debbe esser massima, essendo la intensità della forza perturbatrice eguale alla somma delle due azioni. Dee poi esser minima allora quando la Luna si trova in quadratura col Sole, perchè il Sole deprime, e solleva le acque là, dove la Luna le solleva, e le deprime; e la forza

perturbatrice è eguale alla differenza delle due azioni. L' azione della Luna è secondo il La Place tripla di quella del Sole.

Siccome poi l' acqua naturalmente inerte (40) non può perdere tutta in un tratto la celerità, con cui si va elevando per l' azione della Luna, che si avvicina alla sua congiunzione col Sole; così continuerà ad elevarsi in virtù di quest' azione anche dopo la congiunzione; e perciò arriverà alla massima elevazione non il giorno della congiunzione, ma qualche giorno dopo; e per la stessa ragione la elevazione minima non si avrà nel giorno della quadratura.

* 534. III. Quanto meno son gravi le acque, su cui principalmente agisce la forza perturbatrice, tanto maggiore effetto ella dee produrre.

Quindi

Nei tempi equinoziali, essendo il Sole, e la Luna presso l' equatore, dove le acque son meno gravi, si avranno a circostanze pari le maree più notabili. Il contrario dee seguire, quando il Sole, e la Luna sono presso ai tropici, cioè in vicinanza del solstizio, agendo allora la forza perturbatrice principalmente sopra acque più gravi.

* 535. Ma tutto quello, che noi abbiamo fin qui detto sulle maree non può aver luogo, se l' acqua incontri dei notabili ostacoli al suo moto o per l' azione delle rive, o per altre ragioni. Quindi ben si comprende, che nell'acque mediterranee, e nei piccoli mari non può eccitarsi sensibil marea.

* 536. Ora anche intorno al flusso, e riflusso del mare l' osservazione conferma ampiamente i resultati del ragionamento.

Tutti sanno, che

1.° Ogni giorno sul passaggio della Luna pel meridiano, o poco dopo, le acque dell'Oceano, e di altri spaziosi mari compresi tra i 72° di latitudine boreale, e i 72° di latitudine australe si sollevano ad una più, o men grande altezza. Giunte alla massima altezza cominciano ad abbassarsi a poco a poco; e circa sei ore dopo la loro massima elevazione si trovano nel massimo abbassamento; dopo il quale tornano di nuovo ad alzarsi passando la Luna pel meridia-

no inferiormente, in guisa, che due volte al giorno si vede il flusso, e riflusso; che ogni giorno si ritarda di circa 49', di tanto ritardandosi il passaggio della Luna pel meridiano.

2.° Che le maree si accrescono sensibilmente nella congiunzione, e nella opposizione della Luna col Sole, e specialmente quando la Luna è nel *perigeo*, cioè nella massima vicinanza della Terra.

3.° Circa gli equinozj le maree son più notabili. La più alta marea ha luogo nella sizigia perigea più prossima all' equinozio.

4.° La massima, e la minima elevazione non ha luogo nel giorno della sizigia, e della quadratura, ma qualche giorno dopo. A Brest la massima elevazione si vede un giorno e mezzo dopo la sizigia, e la minima un giorno, e mezzo dopo la quadratura.

5.° L' altezza, cui si sollevano le acque è varia ne' varj luoghi, e ne' varj tempi. La media altezza della massima marea è a Brest di metri 5,888, la minima di metri 2,879. Generalmente parlando le varie circostanze locali introducono speciali variazioni non solo nell' altezza, cui si sollevan le acque, ma anche in tutti gli altri fenomeni del flusso, e riflusso: le quali circostanze essendo ordinariamente costanti, ne son pure ordinariamente costanti gli effetti.

Il Newton è stato il primo a dedurre dalla gravitazione universale, ed a calcolare i fenomeni delle maree. Ma più completamente trovasi sviluppato questo soggetto nelle Memorie dei sigg. Bernoulli, Euler, e Maclaurin, tra' quali fu diviso il premio promesso dall' Accademia delle Scienze di Parigi nel 1740 a chi meglio avesse spiegato il fenomeno delle maree.

* 537. Io non ho creduto di dovermi impegnare a calcolare gli effetti sopra indicati della gravitazione universale, perchè ciò mi avrebbe portato a disquisizioni troppo superiori alle elementari; e mi avrebbe d' altronde condotto fuori della mia provincia. Il mio oggetto è stato solamente di accennare come dal principio della gravitazione universale si deduce la spiegazione dei più grandiosi fenomeni della Natura.

CAPITOLO XXII.

Delle Macchine.

538. La generica denominazione di *Macchina* indica un istrumento, che situato su d' un punto d' appoggio serve a trasmettere l' azione d' una potenza sopra un corpo resistente posto fuori della direzione di essa potenza, sia per comunicarli, o toglierli il moto; sia per accelerarlo, o ritardarlo; sia per regolarne comunque la celerità, o la direzione.

Tre oggetti adunque presenta essenzialmente ogni macchina alla considerazione del Fisico: una potenza o forza motrice, una resistenza, ed un punto d' appoggio comune ad entrambe.

539. Col nome di forza, o potenza s' intende qui tutto ciò, che è capace di produrre un moto, e suol essere l' urto istantaneo sempre ripetuto, o la pressione di un grave, di una molla, o di un animale. Ma da qualunque agente venga quest' urto, o pressione, è sempre una quantità di moto, e conseguentemente il prodotto d' una massa in una celerità.

Ora l' effetto d' una forza applicata ad una macchina risulta e dalla intensità di essa forza, e dalla celerità, che per le sue circostanze può imprimere alla resistenza, e dal tempo, durante il quale ella esercita la sua azione.

Pertanto una forza F agisca pei tempi T, T' imprimendo eguali celerità. Siano E, E' gli effetti prodotti nei detti tempi, avremo $E : E' :: T : T'$; e se essendo diverse le celerità C, C', sia $T = T'$, sarà $E : E' :: C : C'$.

Siano ora due effetti e, e' prodotti colla stessa celerità c nei tempi T, T'. Gli effetti E, ed e; E', ed e' sono respettivamente prodotti nello stesso tempo T, o T'. Avremo dunque $E : e :: C : c$; $E' : e' :: C' : c = \frac{e'C'}{E'}$.

E parimente poichè $e : e' :: T : T'$, $e = \frac{e'T}{T'}$; avremo sostituendo $E : \frac{e'T}{T'} :: C : \frac{e'C'}{E'}$; e quindi $E : E' :: TC : T'C'$; cioè gli effetti d' una stessa forza sono in ragion composta del tempo, durante il quale essa agisce, e della celerità, che agendo imprime alla resistenza.

Due forze diverse F, F' producano gli effetti E, E' imprimendo le celerità C, C' ne' tempi T, T'. Se sono eguali le celerità, e i tempi dell' azione, avremo $E : E' :: F : F'$.

Per paragonare li effetti di queste forze, quando son diverse e le celerità impresse C, C', e i tempi T, T', supponiamo, che una terza forza φ colla celerità C nel tempo T produca l'effetto e; e colla celerità C' nel tempo T' l' effetto e'. Gli effetti E, ed e; E', ed e' essendo respettivamente prodotti in tempi eguali con eguali celerità, avremo $E : e :: F : \varphi$; $E' : e' :: F' : \varphi = \frac{e'F'}{E'}$.

Ma $e : e' :: CT : C'T'$; $e = \frac{e'CT}{C'T'}$. Dunque $E : \frac{e'CT}{C'T'} :: F : \frac{e'F'}{E'}$; onde $E : E' :: FCT : F'C'T'$.

Dunque in generale l' effetto d' ogni potenza dopo un tempo T sarà espresso per la formula FCT.

La resistenza poi è la somma di tutti gli ostacoli,

che nella macchina fan contrasto alla potenza, e può essa pure considerarsi come una forza R opposta alla potenza; e quindi il suo effetto al fine di un dato tempo T sarà espresso esso pure per la formula $RC'T$, detta C' la celerità, che potrebbe eccitare.

Il punto d' appoggio è il sostegno della forza, e della resistenza equilibrata sopra di esso; e perciò è riguardato anche esso come una forza, che agisce oppositamente ad F, e ad R, eguagliandone la risultante. E ciò con tutta la ragione: poichè l' azione del punto d' appoggio non è in sostanza, che la reazione di esso contro la pressione, cui va soggetto; e questa pressione è evidentemente eguale alla risultante di F, e di R, che dee passar per detto punto, onde su quello si possano equilibrar le due forze.

540. Quando la potenza applicata ad una macchina è un grave inanimato, se ne sia costante la massa, e non si cangi il punto di applicazione, l'effetto ne è sempre costante. Ma non così, se sia un agente animato. Gli animali generalmente nell' agire s' indeboliscono; e se dopo un certo tempo non si ristorino col riposo, e col cibo, perdono affatto le forze. Molti sperimenti sono stati fatti, e molti calcoli si sono istituiti sopra i medesimi dai Fisico-Matematici per istimare precisamente l' effetto di quelle potenze, che nell' agire s' infievoliscono; ma non si è ottenuto quel pieno successo, che si desiderava. Noi non entreremo su quest' articolo in minute ricerche estranee al nostro soggetto; e ci limiteremo a riferire i resultati più importanti delle esperienze meglio eseguite.

541. Siccome gli animali, che più frequentemente s' impiegano a muover le macchine sono gli uomini, ed i cavalli; così alla determinazione dell' effetto, che

può specialmente ottenersi da questi hanno rivolto i Fisici le loro ricerche. Per il quale oggetto han preso a determinare segnatamente tre cose. 1.° Qual sia la forza; 2.° quale il momento statico di questi animali; 3.° e quale la fatica giornaliera, di cui son capaci.

542. La forza dell'uomo in un conato di pochi istanti si determina con uno strumento detto *Dinamometro*. Quello immaginato dal Regnier (*V. Journal Polytech. Cah. V.*), con cui si son fatte molte sperienze a Parigi nella Scuola politecnica dal Chaussier, è una molla curvata in ellisse lunga circa o, 3 di metro in maniera, che con quanto maggior forza si stringe nel senso dell'asse minore, o si stira nel senso dell'asse maggiore, tanto più si avanza un indice sopra un lembo graduato. I resultati di queste esperienze mostrano, che il termine medio del massimo della forza degli uomini ordinarj 1.° nello stringere colle mani (operazione, che meglio, e più comodamente riesce, se le braccia si portino in avanti inchinandole ad angolo semiretto colla verticale) equivale a 50 chilogrammi; 2.° nel sollevare verticalmente un peso, tenendo il corpo ben diritto, e solo incurvate un poco in avanti le spalle (ottima posizione) equivale a 130 chilogrammi; 3.° nel sostenere un peso stando fermo equivale a 150 chilog. 4.° nel tirare orizzontalmente mettendosi nella positura, in cui soglion mettersi quelli, che tirano carrette, o barche, corrisponde a 50 chilogrammi.

Nei primi due modi si mostra molto varia la forza degli uomini secondo la loro varia costituzione, età, sesso, abitudini; poco varia si riscontra nell'ultimo modo, probabilmente perchè nei primi l'effetto si produce interamente dalla forza muscolare, nell'ultimo principalmente dal peso della persona.

Alcuni uomini di costituzione assai gagliarda usando con destrezza della lor forza muscolare fan cose meravigliose agli occhi del volgo. Il Desaguliers descrive, e spiega fisicamente molti di questi apparenti mirabili effetti nel T. 1 del suo Corso di Fisica Sperimentale nelle note alla 4.ª Sezione *p.* 274 della traduzione di Pezenas edizione di Parigi. Sarà opportuno, che gli Studiosi della Meccanica vedano queste spiegazioni per facilmente scoprire le imposture dei ciarlatani, e giocolatori. È per altro fuor di dubbio, che talvolta s' incontrano persone dotate dalla Natura di una forza sommamente maggiore dell' ordinaria (*V. Bibl. Un. T.* 39 *p.* 154).

543. Col nome di *momento statico* intendono i Meccanici il prodotto del peso, che un animale è capace di alzare per mezzo di una macchina ad un metro, o altra unità d' altezza in 1", o altra unità di tempo moltiplicato pell' unità di celerità. Per esempio, se un uomo in 1" sollevi per mezzo d' una macchina un peso di 34 chilogrammi all' altezza di un metro, il momento statico di quest' uomo sarà 34 × 1 metro. Il momento statico adunque rappresenta, e misura l' azione dell' animale in 1". Daniele Bernoulli, Borda, Desaguliers, ed altri han fatte delle esperienze per determinare il momento statico dell' uomo, ed hanno avuto tutti dei risultati diversi per quanto veri. La discrepanza nacque dalla diversa maniera, con cui nelle varie esperienze, ed azioni gli uomini si applicavano alle macchine, e segnatamente dall' angolo, che il loro corpo faceva coll' orizzonte. Dopo che il Lambert (*Mem. dell' Ac. di Berlino pell' anno* 1776) ebbe scoperta questa cagione dell' accennata discrepanza, come si conobbe, che una sola formula generale non poteva

bastare a indicare il momento statico dell' uomo; così si sono costruite, specialmente dal Prony (*Arch. Hydraul. Sect. V. n.* 1211, ec.) delle formule, e delle tavole, colle quali si calcola questo momento secondo le varie posizioni del corpo, e si dimostra, che il medesimo va cangiando in ogni caso particolare.

544. A due problemi riduconsi le ricerche dei Fisico-Matematici sulla fatica giornaliera degli animali.

1.° Qual sia la quantità d' azione, o l' intero effetto, che un animale può produrre in un giorno senza sconcertarsi; o in altri termini, qual peso può un animale sollevare in un giorno a una data altezza?

2.° Data la fatica, che un animale può durare in un giorno, come potrà ritrarsene il maggior vantaggio, o l' effetto più grande, che si determinerà dal massimo peso, che può sollevare ad una data altezza?

Suppose Daniele Bernoulli, che in qualunque maniera un uomo lavori, o camminando, o tirando, o con una macchina, o senza, al medesimo grado di fatica corrisponda sempre il medesimo effetto, o la medesima quantità d' azione. Talchè in qualunque modo piaccia di variare il peso, il tempo, e la velocità, che sono gli elementi, da cui risulta la quantità dell' azione dell' uomo; se il loro prodotto sarà costante, l' uomo durerà precisamente la stessa fatica. Suppose pure, che per la fatica d' un giorno debba intendersi la fatica di 7 in 8 ore; e in questa ipotesi calcolò la fatica giornaliera di un uomo in ogni genere di lavoro per un peso di 172800 lib. francesi inalzate ad un piede par. Vedasi la sua Memoria (*sur la manière de suppléer en mer à l' action du vent*) premiata dall' Accademia delle Scienze di Parigi l' anno 1753. Questa opinione del Bernoulli fu generalmente tenuta da tutti i Mec-

canici fino all' anno 1775, in cui il Coulomb in una Memoria letta all'Accademia Reale delle Scienze di Parigi, e stampata assai posteriormente nel secondo tomo delle Memorie dell' Istituto di Francia dimostrò coll' esperienza, e col calcolo, che la fatica non è sempre proporzionale alla quantità d' azione, e che senza accrescere sensibilmente la fatica, può accrescersi l' effetto variando opportunamente la specie del lavoro. Sarà utilissimo di vedere i resultati di queste importanti ricerche nella citata Memoria.

545. Ben poche, e malsicure notizie abbiamo sulla forza, e sul momento statico dei cavalli. Il Desagnliers ha creduto, che la forza del cavallo sia quintupla di quella dell' uomo; altri la dicon sestupla; e le sperienze fatte col dinamometro dal Regnier l' han mostrata settupla nel tirare orizzontalmente. Il Sauveur calcola lo sforzo medio d' un cavallo per circa 200 libbre francesi sollevate all' altezza di tre piedi par. in 1". Taluno ha opinato, che la fatica giornaliera di un cavallo sia di 8 ore, e possa calcolarsi per circa 246 libbre francesi elevate a circa 4 piedi par. in 1". Ma tutto questo è incerto. È però certo, che i cavalli s' impiegano a tirare con maggior vantaggio, che a trasportare. I cavalli nel tirare si spingono innanzi, inclinano le gambe, e portano il petto verso la terra, onde agiscono non solo colla forza muscolare, ma ancora col peso del loro corpo. Dal che nasce, che talvolta un cavallo men forte, e più peso tira più d' uno men peso, e più forte; e che in certe circostanze l' uomo in sella aggiungendo il proprio peso a quel del cavallo, fa, che esso tiri una massa, che senza tale aggiunta non avrebbe tirata.

546. Premesse tutte queste notizie, per risolvere il

secondo tra' problemi sopraccennati (544) sulla fatica giornaliera degli animali, convien riflettere, che l' effetto prodotto da un animale applicato ad una macchina è sempre espresso per FCT (539). Perchè dunque si abbia il massimo effetto, conviene, che questa espressione abbia il massimo valore. Noi non ci tratteremo qui a cercare tutte le maniere, colle quali può ottenersi ciò; e noteremo solo, che

1.° Bisogna procurare, che, se è possibile, le direzioni della potenza, e della resistenza siano nello stesso piano; sian parallele, o facciano il minimo angolo; e la direzione della potenza sia perpendicolare alla retta, che unisce il punto d' applicazione della resistenza col punto d' appoggio. 2.° Che si scelga quella specie di macchina; vi si adatti opportunamente quella forza motrice, che per le circostanze sembra la più efficace; se ne collochi il centro di gravità, e tutte le parti si dispongano in modo, che il peso ne coadiuvi la potenza. Il Molard Membro del Conservatorio delle Arti a Parigi ha ingegnosamente immaginato di applicar la forza degli uomini alle macchine in modo, che stando essi seduti agiscano alternativamente colle mani, e coi piedi; e convertano in profitto della macchina quella forza, che dovrebbero impiegare a sostenersi ritti. 3.° Che si eviti qualunque inutile dissipazione di forze, come gli urti non necessarj (e perciò la pressione è sempre a circostanze pari da preferirsi alla percossa), i moti, e le celerità superflue, ec. Oltre tutte queste precauzioni, e diligenze per aver massimo l' effetto della macchina, bisogna procurare di ridur minimo quello della resistenza; e ciò può ottenersi col diminuire quanto è possibile tutti gli ostacoli al moto, quali sono l' attrito, la rigidità delle corde, ed altre cose, di cui par-

leremo in seguito più opportunamente; e coll' opporre tutti gli ostacoli possibili all' azione della resistenza.

547. Ma di qualunque genere sia una forza, e in qualunque modo si voglia usare, egli è evidente, che l' effetto istantaneo ne è sempre lo stesso, finchè ella è la stessa; nè può con artifizio alcuno ridursi maggiore, senza che sia essa pure ridotta maggiore, *non permettendo la Natura*, scriveva su tal proposito il Galileo (*T.* 3. *p.* 35) al noto Ingegner Siciliano, *d' esser superata, nè defraudata dall'Arte*, Ond' è, che per aumentare il total effetto *finale* di una forza, non vi è altro mezzo, che o di associarla con altre forze cospiranti, o di aumentare il numero degl' istanti, in cui ella agisce, conservandone gli effetti istantanei: e questo appunto fanno le macchine. Tutto ciò si ridurrà ben chiaro dopo le seguenti considerazioni.

548. Possono applicarsi le forze alle macchine per tenerle in equilibrio, o per metterle in moto. Nel primo caso dee la forza distruggere, nel secondo eccitare, o mantenere un moto; e l' effetto ne è nel primo caso di tener in equilibrio la resistenza colla forza, nel secondo di sollevare un grave ad un' altezza in un tempo; giacchè qualunque moto può sempre ridursi a un moto prodotto, o contrariato dalla gravità. Ora qualor si tratti di equilibrio, può bene una piccola forza vincere mercè la macchina una resistenza anche grandissima; ma non è già, che quest' effetto sia prodotto interamente dall' azione della forza. La piccola forza vince solo un' egualmente piccola parte della resistenza; e il rimanente è vinto dall' azione del punto d' appoggio, e da tutte le cagioni fisiche, che difficultando il moto della macchina, come per es. l' attrito, ec. consumano la forza, che tende a produrlo, e diconsi per-

ciò *forze passive*. Allorquando Archimede chiedeva un punto d'appoggio per tenere in equilibrio con una macchina il cielo, e la terra, contava ben più sulla forza di questo punto, che sulla sua. Ed ecco onde nasce, che nella considerazione delle macchine in equilibrio, supponendo = o l' attrito, e ogni altra forza passiva, si dee riguardare il punto d' appoggio come una potenza eguale alla risultante della forza, e della resistenza, e agente in un senso direttamente opposto.

549. Due sole cose pertanto debbono specialmente considerarsi nel calcolo delle macchine in equilibrio, cioè l' intensità delle forze, e il punto di appoggio. Ma quando si tratta dell' effetto di macchine in moto, queste due considerazioni non bastano; perchè tra gli elementi, da cui quest' effetto risulta avvi ancora la celerità impressa ai punti, cui sono applicate le resistenze; e lo spazio, che essi debbono percorrere. Per comprendere qual differenza questo nuovo elemento introduca nell' effetto delle macchine, sarà opportuno osservare, che

550. I. Il moto prodotto da una potenza in una macchina, generalmente parlando, si riduce ben presto alla uniformità. Quando la macchina comincia a muoversi, è certo, che l' azione della forza prevale sull' azione della resistenza, e si produce un' accelerazione di moto. Ma o sia, che per una necessaria conseguenza di questa accelerazione, l'energìa della potenza diminuisca (come se ella è un animale, che agendo si debilita, o l'urto di una molla, o di un fluido, che produce tanto minor effetto, quanto minore è la differenza tra le celerità dell' urtato, e dell' urtante); o sia, che al crescere dell' azione della forza crescano gli

elementi, o l'intensità della resistenza (tale è la resistenza, che al moto delle macchine può presentare per es un fluido ambiente, come l'aria a un girarrosto, l'acqua ad una nave; resistenza, che a circostanze pari cresce al crescere della velocità del mobile, come vedremo a suo luogo); sia finalmente, che sopraggiunga qualche variazione nelle direzioni: certo è, che ordinariamente il rapporto delle due forze va sempre rapidamente avvicinandosi a quello, che è necessario per l'equilibrio scambievole; e ridotto tale questo rapporto, le due forze scambievolmente si distruggono, e la macchina non si muove più, che pel moto acquistato, il quale ordinariamente per l'inerzia della materia resta uniforme (*V. Bossut Traité de Méc. par.* 2 *l.* 2 *chap.* 5). Ciò stabilito è ben facile dimostrare, che

551. II. Se due potenze φ, φ' (due sole ne consideriamo per comodo) applicate successivamente a diversi punti di una macchina, facciano muovere colle celerità C, C' una resistenza applicata ad altro punto della stessa macchina; le quantità di moto, che si produrranno mentre la resistenza (la cui massa si suppone R) percorre lo stesso spazio S pelle diverse forze, saranno eguali. In fatti sia s lo spazio, che la resistenza descrive colla prima celerità nel minimo tempo t; avremo $C : C' :: s : \frac{sC'}{C}$ spazio descritto nello stesso tempuscolo colla celerità C'. Le quantità poi di moto prodotte nella resistenza in detto tempuscolo colle due velocità sono (75) come

$$RC : RC' :: Rs : R\frac{sC'}{C}.$$

Dicansi N, N' le somme degli spazietti elementa-

ri s, $\frac{sC'}{C}$ contenuti in S. Percorsi tutti questi elementi di S, vale a dire percorso tutto lo spazio S colle due velocità, le quantità del moto così prodotte saranno :: $RNs : \frac{RN'sC'}{C}$. Ma essendo il numero delle parti, in cui si divide una data quantità, reciproco alle loro grandezze, abbiamo $N : N' :: \frac{sC'}{C} : s$, e perciò $N' = \frac{NC}{C'}$. Dunque sostituendo, le quantità di moto prodotto nel percorrere lo spazio S saranno :: $RNs : RNs$, cioè eguali. Quindi

552. III. Poichè le quantità di moto prodotte nella resistenza, per esser gli effetti delle forze φ, φ', seguono la proporzione di esse forze moltiplicate pei tempi T, T', in cui agiscono, avremo $\varphi\ T = \varphi'\ T'$; e perciò $T : T' :: \varphi' : \varphi$; cioè i tempi spesi dalla resistenza a percorrere lo stesso spazio S colle celerità comunicatele dalle due diverse forze sono reciproci alle intensità delle forze stesse. Dunque

553. 1.° Quanto è minore la forza applicata ad una macchina, tanto maggior tempo spende per far descrivere a una data resistenza lo stesso spazio, o per sollevare uno stesso peso all'altezza stessa. Per lo che calcolandosi l'effetto d'una macchina per l'elevazione d'un peso ad un'altezza in un tempo; è chiara la verità del noto principio meccanico, *che nell'effetto delle macchine in moto si perde in tempo ciò, che si guadagna in forza*. Così, se Archimede avesse colla sua propria forza tentato di far passare la Terra dall'equilibrio al moto per mezzo di una macchina, anche in un grandissimo numero di anni non avrebbe

potuto farle percorrere, che uno spazio piccolissimo. Dunque

554. 2.° L'effetto, che in un dato tempo producono ineguali forze applicate ad una macchina non è eguale; ma bensì proporzionale all'intensità delle forze stesse. Perciò

555. 3.° Il vantaggio, che procacciano le macchine non è già di produrre grandi effetti con piccoli mezzi; ma solo di somministrare il comodo di scegliere tra diversi mezzi, che possono dirsi eguali, quelli, che sono più utili, e più adattati alle circostanze, e di accumularne gli effetti istantanei, che senza di esse macchine sarebber perduti. In ogni macchina posta in moto l'effetto della resistenza debbe esser distrutto dall'effetto della forza; e ciò non può essere, se i due effetti non siano eguali, e contrarj. Ora tali effetti sono respettivamente espressi per il prodotto di tre fattori, forza, celerità, e tempo. Purchè pertanto il lor prodotto resti costante, si possono questi fattori variare ad arbitrio. Così può diminuirsi la forza a spese del tempo; la velocità a spese della forza; oppure si possono impiegare due, o più forze invece d'una: ciò, che somministra un gran numero di mezzi per procurare un effetto. Qualunque partito per altro si abbracci, bisogna sempre, che l'effetto della forza sia tale da eguagliare, e distruggere quello della resistenza.

556. Un esempio renderà più facilmente intelligibile tutto ciò. Un uomo dotato solamente di una forza capace di sollevare un peso di 25 libbre all'altezza di 5 pie. in 1'' non potrà senza l'aiuto d'una macchina elevare ad eguale altezza un peso *R* di 1000 libbre, nè meno in un tempo assai più lungo, perchè l'effetto,

che produce colla sua piccola forza in ogni minuto secondo, riman distrutto dalla molto maggior resistenza, e si perde. Ma ben lo potrà per mezzo d'una macchina, che vada cumulando tutti questi piccoli effetti tante volte ripetuti, quante occorrono, perchè la lor somma equivalga all'effetto totale, cioè all'elevazione di 1000 lib. a 5 pie. L'effetto FCT (539), che quest'uomo produce in 1", è espresso per 125, avendosi $F = 25$; $C = 5$; $T = 1$". Egli dunque per mezzo della macchina potrà in 1" sollevar la resistenza R di tanto, o imprimerle di basso in alto tal celerità C', che si abbia $125 = RC'T = 1000\, C'$, $C' = \frac{1}{8}$, che è quanto dire potrà in 1" sollevar la resistenza per $\frac{1}{8}$ di piede; e quindi perchè ella venga alzata a 5 piedi, dovrà per 40 volte ripetere la stessa azione. Bisogneranno dunque 40" perchè una forza $= 25$ produca l'effetto, che una forza $= 1000$ produrrebbe in 1". E poichè $1 : 40 :: 25 : 1000$, è chiaro, che quanto è minor la forza, tanto è maggiore il tempo, che ella impiega a produr con una macchina un dato effetto.

Ciò, che segue negl'istanti, o nei minuti secondi, quando si tratta di sollevare una resistenza in tempo notabile, segue negli elementi dell'istante, quando una forza coll'aiuto di una macchina smuove in un istante tal resistenza, che non avrebbe potuto smuovere senza quell'aiuto. La macchina accumula le piccolissime azioni esercitate contro la resistenza in ogni elemento dell'istante, le quali sarebber perdute senza di essa macchina; ma accumulate per essa vincono la resistenza.

557. Premesse tutte queste generali considerazioni, conviene, che passiamo a dar la teorica particolare per l'equilibrio d'ogni macchina, cioè ad accennar le con-

dizioni necessarie, perchè si abbia l' equilibrio particolarmente in ogni macchina tra la forza, e la resistenza.

Noi abbiamo esposta a suo luogo la dottrina generale dell' equilibrio, onde non ci resta qui, che da farne l' applicazione alle diverse macchine. Per il quale oggetto sarà opportuno di avvertire, che noi considereremo la potenza, e la resistenza come due forze, che situate in uno stesso piano debbono equilibrarsi intorno al punto fisso d' appoggio, o intorno ad un asse, che passi per detto punto normalmente al piano delle forze; onde si avrà in generale per condizione sufficiente, e necessaria del loro equilibrio, che la loro risultante ne passi per il punto d' appoggio, sì che i loro momenti riferiti ad esso punto siano eguali, ed opposti (177. 4.° 166).

558. Ora tra le macchine altre sono *semplici*, altre *composte*. Le semplici sono *la leva*, o *vette*; *la puleggia*, o *carrucola*; *l' argano*, o *tornio*; *il piano inclinato*; e *la macchina funicolare*. Le prime quattro eran note agli Antichi, ma l' ultima è di recente invenzione, e ne dobbiamo al Varignon la prima teorica. Le macchine composte sono quelle, che resultano dalla combinazione comunque eseguita delle semplici, e possono per conseguenza esser pressochè infinite. Noi ci limiteremo a parlar delle semplici.

Leva, o *Vette*.

559. La leva, o vette è una verga inflessibile AB retta, o curva, che appoggiandosi (*Figg.* 10, 11, 12) sopra un dato punto fisso P detto *Ipomoclio* trasmette l' azione di una potenza *F* sopra una resistenza *R*. Sic-

come la varia disposizione della forza, e della resistenza relativamente all' ipomoclio fa variare l' energia della leva; così corrispondentemente a questa varia disposizione varj generi di leva si considerano, e si denominano dai Meccanici. Quando P è tra F, ed R (*Fig.* 10), dicesi la leva di *primo genere*; quando R è tra P, ed F (*Fig.* 11), di *secondo genere*; quando F è tra P, ed R (*Fig.* 12), di *terzo genere*. Cercheremo per ognuno di questi generi di vette le condizioni di equilibrio tra la forza F, e la resistenza R, suppouendole entrambe in uno stesso piano.

560. La condizione generale dell' equilibrio pel vette è data dall' equazioni stabilite sopra (152), dalle quali apparisce, che *nel vette in equilibrio la somma dei momenti delle forze, che tendono a farlo rotare in un senso intorno all' ipomoclio debbe eguagliar la somma dei momenti di quelle, che tendono a farlo rotare in senso opposto*. Quindi, se si faccia astrazione dalla gravità del vette, essendo applicate la potenza alla distanza AP, la resistenza alla distanza BP dall' ipomoclio, si ha $F.\mathrm{AP} - R.\mathrm{BP} = 0$ (se il vette sia curvo, le distanze della potenza, e della resistenza dall' ipomoclio si misureranno con le normali abbassate dall' ipomoclio sulle loro direzioni). Ma qualora il vette si consideri come grave, il peso G dee riguardarsene come una forza applicata al suo centro di gravità Q; e il suo momento $G.\mathrm{PQ}$ dee sommarsi, o sottrarsi dal momento di F, secondo che cospira colla resistenza, o colla potenza a far rotare il vette. Avremo in tal caso per l' equilibrio in ogni genere di vette $F.\mathrm{AP} - (R.\mathrm{BP} \pm G.\mathrm{QP}) = 0$ (si prende + nel vette di secondo, e terzo genere sempre; nel vette di primo genere, quando Q è tra P, e B; si

prende — nel vette di primo genere, quando Q è tra P, ed A). Quindi

561. I. Per ogni genere di vette

1.° Si conserverà sempre il vette in equilibrio, se quando si aumenti la forza, o la resistenza, si diminuisca a proporzione la respettiva distanza dall' ipomoclio; o s' accresca, se quelle diminuiscansi.

2.° L' equilibrio si turberà per quella parte, per cui si accresce il momento; onde se si aumenti la forza, o la resistenza; oppure le loro respettive distanze dall' ipomoclio, la forza prevarrà sopra la resistenza, o la resistenza sopra la forza.

3.° Dall' equazione generale rilevandosi $F = \frac{R \cdot BP \pm G \cdot QP}{AP}$, è chiaro, che quanto maggiore sarà la distanza AP dall' ipomoclio del punto nel vette, cui si applica la forza, tanto minor quantità se ne richiederà per tener in equilibrio, e vincere una resistenza. Onde non vi è peso smisurato, che non possa teoricamente equilibrarsi, e considerarsi come mobile da qualunque piccola forza applicata ad una leva.

562. II. Per il vette di primo genere in particolare

1.° Se P è tra Q, ed A, la gravità della leva è contraria alla forza, componendosi la gravità G colla resistenza R (143); onde rimane una resistenza G. QP da equilibrarsi anche quando $R = 0$; ma se P è tra Q, e B, la gravità componendosi colla forza è alla medesima favorevole in modo, che alle volte può aversi l' equilibrio tra R, e G solamente senza F; e ciò quando G. QP $= R$. BP.

2.° Se poi P coincida con Q, il peso della leva non produrrà alcun effetto per l' equilibrio; poichè essen-

do in tal caso PG $=0$, sarà pure G . PQ $=0$, e potrà considerarsi la leva come priva affatto di gravità.

3.° In tal circostanza, se $F=R$, e si abbia equilibrio, saranno situate la forza, e la resistenza a egual distanza dall' ipomoclio.

Il vette di prim' ordine è una verga ordinariamente rettilinea; ma talvolta può essere anche zancata, o piegata ad angolo (*Fig.* 13) ed avere il punto d' appoggio nell' angolo P, la potenza applicata in R, e la resistenza in B. La teorica è evidentemente la stessa tanto per l' una, che per l' altra configurazione.

563 III. Per il vette di secondo genere in particolare (*Fig.* 11) AP . $F=R$. BP $+$ G . QP . Dunque

1.° La forza necessaria all' equilibrio non può mai esser più grande della resistenza totale, perchè è sempre necessariamente AP $>$ BP (559).

2.° Il peso del vette è sempre a scapito della forza. Dal che segue, che aumentando la lunghezza del vette, mentre per un lato si favorisce la forza, per l' altro si contraria; onde la lunghezza o eccessivamente grande, o piccola eccessivamente è sempre svantaggiosa alla forza; e vi ha un determinato massimo di lunghezza, che dà il massimo vantaggio.

Volendo determinar questo massimo convien osservare, che dee per ciò la forza F, o sia la quantità $\frac{R.\,\mathrm{BP} + G.\,\mathrm{PQ}}{\mathrm{AP}}$ avere il più piccolo valore; vale a dire, che il differenziale dee esserne eguale a zero. Posto dunque AP $=x$; BP $=a$; e supponendo la verga uniforme, ed omogenea, e che il peso dell' unità di lunghezza ne sia g, onde si abbia $G=gx$; e QP $=\frac{1}{2}x$, dovrà essere $\frac{d\,(R\,.\,a+\frac{1}{2}gx^2)}{\mathrm{AP}}=0$; cioè $-\frac{R\,.\,a}{x^2}+\frac{1}{2}g=0$; e quindi $x=\sqrt{\frac{2\,R\,.\,a}{g}}$ sarà la lunghezza

da darsi al vette per ottenere il massimo vantaggio. Avremo allora $F = \sqrt{2gR \cdot a}$; e il risparmio della forza sarà la differenza tra R, e $\sqrt{2gR \cdot a}$; vale a dire si avrà vantaggio ogni qual volta sia $2ga < R$, o sia quando la resistenza superi il peso del braccio della leva.

IV. Per il vette di terzo genere in particolare essendo (*Fig.* 13) $AP \times F = R \times BP + G \times QP$, e sempre $AP < BP$, non può mai esser la forza minore della resistenza; onde questa leva è sempre a svantaggio della forza.

564. Frequentissimo è l'uso di tutti e tre i generi di vetti, che abbiamo considerati. Vetti di terzo genere sono i pedali degli organi, le calcole de' telari, le *stanghe*, onde mettonsi in moto le macchine degli Arrotini, ed i muscoli degli animali. Vetti del secondo genere sono i remi, gli alberi delle navi, le imposte delle porte, e delle finestre, i mozzi delle campane, le mascelle degli animali, ec. Moltissimi poi sono i vetti di primo genere, e tra quelli, il di cui uso è più comune, meritano una special considerazione le macchine, che conosconsi sotto nome di *bilancia*, e di *stadera*.

La bilancia è una resistente, ed omogenea verga orizzontale AB (*Fig.* 14), che può rotar solo d'alto in basso intorno ad un punto, o asse fisso d, e sostiene colle sue estremità A, B due piatti equiponderanti D, E appesi per mezzo di cordoni parimente equiponderanti. Per renderne sensibili anche i più piccoli movimenti si fissa normalmente su detta verga un *ago* L nella verticale, che passa pel suo centro di gravità al di sopra, o al di sotto di questo punto. La bilancia è destinata a scoprire il peso dei corpi nella seguente maniera. Posto in un piatto il corpo da pesarsi, se si ponga

nell' altro un peso noto, che dicesi *contrappeso*, la permanente situazione orizzontale della verga equilibrata dee indicare l' equiponderanza dell' uno, e dell' altro. Ora per ciò è necessario

1.° Che la verga, e i piatti siano orizzontali in perfetto equilibrio prima d' esser caricati: per lo che sarà opportuno, che il centro di gravità della macchina si trovi nella stessa verticale col punto di sospensione, o col centro del moto, onde ella possa considerarsi come priva di gravità.

2.° Che detto M il peso del corpo da pesarsi posto nel piatto E, C quello del contrappeso posto nel piatto D, sia $C.$ AP $= M.$ BP; e perciò, che siano eguali le *braccia* AP, BP, o le distanze dei punti, cui sono appesi i piatti, dal centro del moto.

565 Perchè dunque la bilancia sia esatta, conviene, che le due braccia siano egualmente lunghe (si misura la lunghezza del braccio della bilancia con una normale condotta dal punto d alla verticale, che passa pel punto di detto braccio, cui è sospeso il piatto). Se un braccio è più lungo, non si conosce immediatamente il vero peso, che cercasi, perchè il piatto corrispondente al braccio più lungo fa equilibrio al contrappeso con minor carico, compensandosi la minor quantità del carico colla sua maggior distanza dall' ipomoclio. In tal caso la bilancia dicesi *falsa*. Per altro anche da una bilancia falsa può rilevarsi il vero peso di un corpo col seguente piccolo artifizio. Pongasi nel piatto E il corpo M da pesarsi, nel piatto D il noto contrappeso C, che faccia equilibrio. Quindi si metta M nel piatto D, e nel piatto E un altro contrappeso C' parimente noto, che faccia esso pure equilibrio. La radice quadrata del prodotto di C in C' sarà il peso

vero di *M.* Infatti nel primo caso abbiamo $C.\ AP = M.\ BP$, nel secondo $M.\ AP = C'.\ BP$, e però $C.\ AP : M.\ AP :: M.\ PB : C.\ BP$, o sia $M^2 = C \times C'$; $M = \sqrt{C \times C'}$.

Generalmente parlando una perfetta esattezza nella bilancia è quasi impossibile; onde quando sia importante di conoscere con somma precisione il peso d' un corpo, dovrà usarsi il metodo ora esposto, o pure il seguente, che è il più sicuro, e più facile. Si ponga in un piatto della bilancia il corpo da pesarsi, e un altro corpo qualunque; e nell' altro piatto un contrappeso, che faccia equilibrio. Quindi si tolga il corpo da pesarsi. La quantità dei contrappesi, che sarà necessario metter nel piatto, d' onde si è levato il corpo da pesarsi, per ristabilir l' equilibrio, darà sempre con esattezza il peso cercato. Ove si usi questo modo di pesare, per la perfetta esattezza della bilancia si richiede solo, che siano assolutamente invariabili i punti, cui sono appesi i piattelli.

La perfetta bilancia deve essere non solo *esatta*, ma anche non *sorda*; cioè tanto sensibile, che per ogni piccolo aumento di peso se ne alteri l' equilibrio; e non *pazza*, cioè tanto pronta a rimettersi in equilibrio essendone rimossa, che non trabocchi per ogni piccolo disequilibrio. Si darà alla bilancia la prima qualità diminuendo quanto si può gli attriti (71), e tanto più facilmente se le darà, a circostanze pari, quanto le braccia ne saran più lunghe (purchè non si curvino), giacchè la lunghezza del braccio rende maggiore il momento del peso, che è applicato all' estremità del medesimo, e facilita perciò la rotazione. Perchè poi la bilancia non sia pazza conviene, che il centro di gravità del sistema sia nella verticale PL tanto più sotto del

centro d di rotazione, quanto è possibile, onde abbia luogo l' equilibrio stabile (243).

Le accennate qualità possono darsi alla bilancia con varie costruzioni. Il Biot nel principio del suo Trattato di Fisica (*T.* 1 *pag.* 19) ne descrive una delle migliori, e di cui si può far uso con sicurezza nell' esperienze più delicate.

566. Oltre la bilancia, si suole usare per conoscere il peso dei corpi la stadera. Una verga uniforme AB (*Fig.* 15), da cui pende il piatto C, sostenuta nel punto P, intorno al quale può rotare d' alto in basso, forma la stadera. Nel piatto C si pongono i corpi da pesarsi; si fa scorrere lungo la verga AB per mezzo d' un anello il *romano*, o contrappeso *R*, che dee tenergli in equilibrio; e la diversa distanza, cui perciò convien portarlo, mostra la diversità dei pesi.

Ecco brevemente la teorica di questa macchina. Sia *G* il peso del braccio PB, che si considera riunito nel centro di gravità M; *F* il peso del braccio AP riunito nel centro di gravità H; *C* il peso del piatto C, e dei suoi annessi. Supponiamo, che per aver equilibrio col corpo *M* posto nel piatto C convenga porre in d il romano *R*. Avremo $M \times AP + F \times PH + C \times AP = R \times dP + G \times PN$. Ma perchè dall' equilibrio della stadera caricata possa precisamente dedursi il peso del corpo *M*, conviene, che le due braccia della stadera siano in equilibrio indipendentemente dal rapporto del peso di esso corpo a quello del romano, conviene cioè, che nella stadera scarica si avveri l' equazione $F \times PH + C \times AP = G \times PN$. Volendo dunque la condizione d' equilibrio tra il corpo *M*, e il romano soltanto, conviene togliere la seconda equazione dalla

prima ; e così resterà $M \times \mathrm{AP} = R.\mathrm{Pd}$; onde $M = \frac{R.\mathrm{Pd}}{\mathrm{AP}}$.
Dividasi pertanto lo spazio Pd in n parti eguali Pa, ab, bc, cd, ec.; e sia ciascuna di queste eguale alla AP. Sarà $\mathrm{Pb} = 2\mathrm{AP}$; $\mathrm{Pc} = 3\mathrm{AP}$; $\mathrm{Pd} = n \,.\, \mathrm{AP}$; onde $M = \frac{\mathrm{R.Pd}}{\mathrm{AP}} = n\ R$. Perciò, se sia $R = 1$ libbra, e posto in b faccia equilibrio con M, sarà $n = 2$, e conseguentemente $M = 2$ libb.; se faccia equilibrio in c, sarà $n = 3$, $M = 3$ libb. ec.

567. Egli è poi chiaro, che suddividendo in parti eguali le divisioni Pa, ab, bc, ec., si peserà qualunque minima parte della libbra. Se $R = 1$, siccome ogni divisione accenna una libbra, dividendo ogni divisione in 12 parti, potranno pesarsi le once, ec.

Pressioni su gli appoggi.

568. Da quanto dicemmo al n° 152 rilevasi, che nel vette AB (*Fig.* 10) si ha

1.° $F = \frac{\varphi.\ \mathrm{PB}}{\mathrm{AB}}$ carico del punto A, cui è applicata la potenza;

2.° $R = \frac{\varphi.\ \mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}$ carico del punto B, cui è applicata la resistenza;

3.° $\varphi = \frac{R.\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}}$ carico del punto d' appoggio P.

Quindi deducesi l' importante dottrina delle pressioni, che un peso collocato sopra di una verga, o di un piano esercita su gli appoggi, che lo sostengono. Poichè come i carichi dei punti, cui si applicano la forza, e la resistenza sono nel vette i componenti della risul-

tante φ carico dell' ipomoclio; così nel piano, che sostiene un peso, le pressioni sofferte dagli appoggi sono le componenti della pressione totale esercitata dal peso P in ragion della sua quantità sul punto, in cui posa.

* 569. Noi esporremo sommariamente ciò, che di più necessario a conoscersi comprende questa dottrina.

I. Sia appoggiata su due sostegni C, D (*Fig.* 16) posti nel medesimo piano orizzontale la verga omogenea AB gravata da un peso P collocato sulla medesima, e dal suo peso G, che si considera come una potenza applicata al suo centro di gravità, o al suo punto medio. I due pesi P, e G concorreranno a premere i sostegni. Siano x, z le pressioni esercitate da P; y, t le pressioni esercitate da G su i sostegni C, D. Sia $AB = 2a$; $GP = b$, onde $AG = BG = a$; $PB = a + b$, $AP = a - b$; avremo $x = \frac{P(a+b)}{2a}$; $z = \frac{P(a-b)}{2a}$; e $y = \frac{aG}{2a}$; $t = \frac{aG}{2a}$, cioè $y = \frac{1}{2} G$; $t = \frac{1}{2} G$. Dunque il carico, o la pressione totale di C sarà $x + y = \frac{1}{2}(G + P) + \frac{bP}{2a}$; e il carico di D sarà $z + t = \frac{1}{2}(G + P) - \frac{bP}{2a}$.

* 570. II. Siano ora situati in un piano obliquo all' orizzonte i due sostegni A, B (*Fig.* 17), su cui posa la verga AB; talchè essa faccia coll' orizzonte l' angolo $BAC = n$. S' indichi colla linea PC il peso del corpo P, e colla GR il peso G della verga riunito nel centro di gravità G; e si risolvano questi pesi nei due PD, DC; e GF, FR gli uni normali, gli altri paralleli alla verga. È chiaro, che il sostegno B regge solo una parte dei pesi PD, GF; e tutto il resto è retto da A. Quindi poichè l' angolo $PAC = CPD = RGF = n$, essendo CD, ed RF parallele ad AB, sarà $PD = PC \times cos.\ n = P\ cos.\ n$; $GF = GR.\ cos.\ n = G.\ cos.\ n$; onde sostituendo nelle formule del n.° superiore queste espressioni, sarà $x = \frac{P.\ cos.\ n\ (a + b)}{2a}$, $z =$

$\frac{P. \cos. n (a-b)}{2a}$; $y = \frac{1}{2} G \cos. n$; $t = \frac{1}{2} G \cos. n$. Descritti poi coi centri P, e G, e coi raggi PC, GR gli archi CE, RH, sarà $PC = PE = P$; $GR = GH = G$; ma $PE = PD + DE$; e $PD = P. \cos. n$. Dunque $PE = P \cos. n + DE$; e $DE = P (1 - \cos. n)$. Nel modo stesso si troverà $FH = G (1 - \cos n)$. Dunque la pressione del sostegno B sarà $z + t = \left(\frac{aG + aP - bP}{2a}\right) \cos. n$. Ma il carico totale del sostegno A sarà $x + y + DE + FH = G + P - \left(\frac{aG + aP - bP}{2a}\right) \cos. n$.

* 571. Che se la verga avesse nella sua estremità verso B una prominenza, con cui potesse attenersi al sostegno B, il resultato del passato calcolo varierebbe in questo solo, che mentre nell' ipotesi del numero superiore il sostegno A dee reggere tutto il peso DE + FH, in questa ne reggerebbe solo la metà, essendone retto l' altro dalla prominenza in B, com' è chiaro. Dunque il carico di B sarà $z + t + \frac{1}{2} (ED + FH) = \frac{1}{2} (P + G) - \frac{bP \cos. n}{2a}$; e il carico di A sarà $z + y + \frac{1}{2} (DE + FH) = \frac{1}{2} (P + G) + \frac{bP \cos. n}{2a}$.

* 572. III. Siano ora (*Fig.* 18) situati in linea verticale i sostegni, o gli arpioni, che sorreggono il piano BCDE, il quale abbia in G il centro di gravità. Tirate dagli arpioni B, C sul centro G le linee BG, CG, e prolungata BG in M, esprimasi il peso del piano per la porzione $GO = P$ della verticale AP, sulla qual porzione presa per diagonale si costruisca un parallelogrammo MN, che abbia per lati le sezioni GM, GN delle direzioni BG, GC. È chiaro, che GM esprime lo sforzo, con cui il peso P tende a strappare l' arpione B nella direzione BG; e GN indica la spinta, con cui l' arpione C è premuto nella direzione GC. Ora abbiamo (127) GO : GM : GN :: *sen.* MGN : *sen.* OGN : *sen.* OGM :: *sen.* CGB : *sen.* GCB : *sen.* GBC :: CB : GB :

CG. Dunque $GM = \frac{P.\,GB}{CB}$; $GN = \frac{P.\,GC}{CB}$. Pertanto dai punti G, M si tirino sopra BC, GO le normali GF, MS, e s' intenda risoluta la MG nelle due GS verticale, MS orizzontale, e la $GN = MO$ nelle due MS orizzontale, SO verticale. Facilmente si comprende, che il peso P esercita due azioni sull' arpione B, uno sforzo orizzontale MS, con cui tende a strapparlo, ed una pressione verticale GS; e due azioni sull' arpione C, una pressione verticale SO, ed una pressione orizzontale MS, che lo spinge contro il muro, in cui è incastrato, la quale eguaglia lo sforzo, con cui tende a strappare l' arpione superiore. Ora per la somiglianza dei triangoli BCF, SMG abbiamo

1.° $MS = \frac{GM\,.\,GF}{BG} = \frac{GE}{BG} \times \frac{P.\,BG}{CB} = \frac{P.\,GF}{CB}$ pressione orizzontale sofferta in fuori dall' arpione B, in dentro dall' arpione C.

2.° $GS = \frac{GM\,.\,BF}{BG} = \frac{P.\,BF}{BC}$ pressione verticale sofferta dall' arpione B. Nella maniera stessa per la somiglianza dei triangoli SMO, FGC si troverà $SO = \frac{OM\,.\,CF}{CG} = \frac{GN.CF}{CG}$ $= \frac{P.\,CF}{CB}$ pressione verticale sofferta dall' arpione C.

Dal che è chiaro, 1.° che i due arpioni soffrono dal peso del piano EC un' egual pressione orizzontale proporzionale al prodotto del peso medesimo nella distanza orizzontale tra il centro di gravità, e la verticale, in cui essi si trovano, diviso per la distanza, che passa tra un arpione, e l' altro; 2.° e ciascun arpione una pressione verticale proporzionale respettivamente alle distanze tra il punto della verticale, in cui sono, e l' orizzontale, che passa pel centro di gravità del piano premente.

* 573. IV. Siano tre sostegni A, B, C (*Fig.* 19), che disposti in triangolo, e nello stesso livello sorreggano un piano non grave, su cui è collocato un peso P.

Le pressioni sofferte da questi sostegni son quelle stesse, che soffrirebbero, se sopra di loro non si appoggiasse già il piano accennato, ma i due vetti AB, CN stabilmente uniti in

N, e gravati da P. Ciò è sì chiaro per se stesso, che il Bossut non credè necessario di darne dimostrazione; ma l' insigne Geometra Signor Com. Pietro Paoli per torre ogni dubbio lo ha dimostrato pienamente nel n.° VI. della sua Memoria *sopra alcuni problemi meccanici* inserita tra quelle della Società Italiana nel T. 6.

Ora egli è evidente, che tutto il carico del peso P è sostenuto dalle estremità N, C della leva NC. L' estremità C è sorretta dal sostegno collocato in C, ma l' estremità N grava sul vette AB, e conseguentemente il peso, che la preme è sorretto dalle due estremità A, B, o sia da' due sostegni corrispondenti. Dicasi pertanto x la pressione del punto C, t quella di N, y quella di A, z quella di B. Avremo per le cose già stabilite (568)

$$x = \frac{P.\,NP}{CN}\,;\; t = \frac{P.\,PC}{CN}\,;$$

$$y = \frac{t.\,BN}{AB} = \frac{P.PC.BN}{NC.\,AB}\,;$$

$$z = \frac{t.\,NA}{AB} = \frac{P.PC.NA}{NC.AB}$$;onde sostituendo, e riducendo,

$x : y : z$ :: AB. NP : PC. BN . PC. NA.

Quindi

* 574. 1.° Si tirino le rette PA, CA, PB, CB; e da P si tiri sopra AB la normale Pn, e si guidino pure le altre normali An', Bn''. Abbiamo, per la somiglianza dei triangoli PNn, BNn'', PN : Pn :: BN : Bn''; e BN : Bn'' :: AN : An' per la somiglianza dei triangoli BNn'', ANn'; onde PN : BN : AN :: Pn : Bn'' : An'. Perciò sostituendo, x . y : z :: AB . Pn : PC . Bn'' : PC . An'. Ora essendo AB . Pn = 2 *trian.* APB; PC. Bn'' = 2 *trian.* PBC; e PC . An' = 2 *triang.* APC; avremo $x : y : z$ :: *triang.* APB : *triang.* APB : *triang.* APC.

2.° Perciò se P sarà collocato nel centro di gravità del triangolo BAC, le pressioni dei 3 sostegni saranno eguali. Poichè in tal caso (210) BN = NA = $\frac{1}{2}$ AB; AB = 2NA; NP = $\frac{1}{3}$ NC; PC = $\frac{2}{3}$ NC; i quali valori sostituiti nell' analogia (573) $x : y : z$ :: AB . NP : PC . BN : PC . NA danno $x : y : z$ :: $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3}$.

* 575. 3.° Se sia P nella linea AB, cioè se sia PN = o

sarà anche $x = 0$; onde tutto il peso P si distribuirà sopra i due sostegni A, B.

* 576. 4.° Finalmente se i tre sostegni sian disposti in linea retta, siccome si ridurranno eguali a zero i triangoli APB, PBC, APC; così i valori di x, y, z saranno espressi per $\frac{0}{0}$; e il problema delle pressioni su tre appoggi diverrà per tal caso nella sua generalità indeterminato.

* 577. Così pure se si cerchino le pressioni di quattro, o più sostegni, che per mezzo di verghe, o altri strumenti inflessibili soffrano l'azione di un peso P, il problema generale, senza alcuna condizione, che lo limiti, è nello stato attuale della Meccanica assolutamente indeterminato. Poichè le pressioni, come è evidente, sono prodotte dalla tendenza, che per l'azione del peso le verghe hanno a muoversi, o rotare contro i sostegni. Ora siccome il moto non può riferirsi, che a tre soli assi distinti; così gli attualmente noti principj meccanici non posson dare, che tre sole equazioni distinte per determinare quattro, o più incognite, se quattro, o più sono le pressioni. Potranno i Curiosi consultare su tal proposito una interessantissima Memoria del Signor Com. Paoli nel T. IX delle Memorie della Società Italiana.

Resistenza dei solidi alla rottura.

* 578. Dalla teorica del vette dipende non solo la dottrina delle pressioni, ma quella ancora delle resistenze, che i corpi oppongono alle potenze, che tendono a spezzarli. Riducesi tutta questa dottrina a determinare il rapporto tra lo sforzo, che una potenza posta in certe circostanze esercita contro una sezione di un solido per distaccarla dalla contigua, e la resistenza, che si oppone dal solido ad un tale sforzo. Ora in tre situazioni può trovarsi la potenza tendente a separar le sezioni di un solido, o a vincerne la coesione. Può essere applicata 1.° normalmente, o direttamente; 2.° parallelamente alla sezione da distaccarsi; 3.° in modo da premere il solido sorretto da due sostegni, tendendo ad imprimere a due sezioni contigue un moto di rotazione in sensi opposti. Così ella può esser rappresentata da un grave, che applicato all'estremità di un prisma verticale nel primo caso,

orizzontale nel secondo tenda a strapparne un pezzo col proprio peso; e che prema nel terzo caso un corpo sorretto da due sostegni.

579. Nel primo caso, se il corpo è omogeneo, la resistenza, che dicesi *assoluta*, non è, che la semplice forza di coesione degli elementi componenti il solido moltiplicata per la superficie della sezione da staccarsi, come evidentemente deducesi da ciò, che dicemmo a suo luogo della coesione. A questo caso non si applica la dottrina del vette, onde non ci tratterremo ad esaminarlo: tanto più, che la sola esperienza può determinare i rapporti, che passano in tal caso tra la forza, e la resistenza. I Curiosi potranno consultar con profitto su questo articolo l'opere del Musschenbroek (*Introductio ad cohaerentiam corporum firmorum*), e del Duhamel (*Art de la corderie*), e la prima parte del secondo tomo degli Elementi di Fisica del Pouillet (*p.* 78), dove troveranno i resultati delle sperienze più importanti, e più esatte di diversi valenti Autori. Limitandoci noi all'esame del secondo, e terzo caso supporremo, che i corpi siano omogenei, e di tal natura, che tutte le parti delle diverse sezioni prive affatto di flessibilità, e di elasticità debbano staccarsi contemporaneamente nel caso della rottura.

* 580. La potenza verticale, per fissar le idee, $P = p$ applicata al solido SBV (*Fig.* 20) tenda a romperlo nella sezione sb, cioè a far rotare la sezione sb intorno alla linea orizzontale LG condotta nel piano della medesima pel suo infimo punto b. Lo sforzo di P per quest' oggetto sarà pn (154), se n sia la distanza della sua direzione dalla sezione sb. A questo sforzo resiste la tenacità d'ogni particella della sezione: e siccome tal resistenza, che dicesi *respettiva*, tende a produrre un effetto contrario a quello prodotto da P; così può considerarsi come tendente a imprimere alla sezione un moto di rotazione intorno al medesimo asse in senso opposto. Perciò la resistenza d'ogni particella sarà espressa pel momento della sua tenacità riferito all'asse LG; e la resistenza di tutta la sezione per la somma dei momenti della tenacità di tutte le particelle, cioè pel momento della risultante di tutte queste forze di tenacità. Ora la tenacità essendo proporzionale alla massa in ogni particella, e nel pri-

mo momento della rottura essendo parallele le direzioni, secondo cui ella agisce, in tutte le particelle, il *centro di tenacità*, per cui ne passa la risultante, coincide col centro di gravità della sezione (405). Dunque la resistenza presentata dalla sezione s b alla rottura sarà espressa pella formula mst, cioè pel prodotto della tenacità t nella superficie s della sezione moltiplicata pella distanza m del centro di gravità della sezione dalla linea LG.

Dunque

* 581. I. Si avrà equilibrio tra la potenza P, e la resistenza opposta dalla tenacità della sezione s b, quando $np = mst$.

* 582. II. Se il solido sia cilindrico, e sia r il raggio della base, sarà $s = \pi r^2$, $m = r$ (208), $mst = \pi r^3 t$; ed in un altro simil cilindro di egual materia $m' s' t = \pi r'^3 t$; onde nei due cilindri sarà $mst : m' s' t :: r^3 : r'^3 :: 8r^3 : 8r'^3$, essendo la metà proporzionali agl' interi. E generalmente siccome in tutti i simili prismi regolari le basi, o le facce sono come i quadrati dei lati $2r$, $2r'$, cioè $:: 4r^2 : 4r'^2$, e la distanza m è proporzionale alla metà, o all' intero lato; così potrà stabilirsi generalmente, che nei cilindri, e nei prismi regolari simili, le resistenze sono come i cubi dei diametri, o dei lati.

Se poi le sezioni d' uno stesso solido, che debbano distaccarsi in diversi casi, o di solidi diversi d' egual materia abbiano eguali superficie, ma lati omologhi ineguali; le resistenze saranno come le distanze del centro di gravità dall' asse di rotazione; e perciò

* 583. 1.° Un parallelepipedo, o una trave fissa nel muro in modo, che ne sia il lato orizzontale minore del verticale, presenterà ad esser rotta da un peso una maggior resistenza, che se fosse situata in modo da aver il lato orizzontale maggiore del verticale: e sarà la resistenza nel primo caso alla resistenza nel secondo come il lato maggiore al lato minore; tale essendo il rapporto, che han fra loro ne' due casi le distanze del centro di gravità dall' asse di rotazione.

* 584. 2.° Se un solido cilindrico eguagli in peso, e lunghezza un cilindro vuoto d' egual materia, il cilindro vuoto avendo un diametro maggiore, opporrà all' azione del

peso P, che applicato ad una delle sue estremità tende a romperlo, una resistenza respettiva maggiore, che quella opposta dal solido massiccio: e la resistenza del primo starà alla resistenza del secondo in ragion diretta dei raggi delle loro basi. Poichè questi raggi sono la misura della distanza del centro di gravità dal punto, intorno al quale debbono rotar le parti staccandosi nella rottura. Onde la medesima quantità di materia costituente un cilindro massiccio può ridursi capace d' una resistenza assai maggiore, qualora mantenuta la medesima lunghezza del cilindro, rendendolo cavo si aumenti il diametro della base: e lo stesso vale anche per altri prismi. Tale artifizio adopra la Natura nella costruzione dell' ossa degli animali, e delle penne degli uccelli, che essendo cave riescono meno gravi, meno bisognose di nutrimento, e più resistenti. Così pure una leggerissima paglia vuota sostiene senza rompersi una spiga assai grave, che non potrebbe sostenere, se formata colla stessa quantità di materia fosse tutta piena.

* 585. III. Siccome a circostanze pari il momento della resistenza dei solidi dipende dall' ampiezza della sezione da distaccarsi nella rottura; e quello della forza, che tende a romperli, dalla distanza *n* della sua direzione dall' asse di rotazione; così se per la special configurazione di un solido accadesse, che di quanto cresce la distanza *n*, d' altrettanto dovesse pur crescere l' ampiezza delle superficie; il momento della resistenza, e quello della forza avrebbero tra loro in questo solido un rapporto costante. Facilmente poi si trova qual debba essere questa configurazione nelle varie circostanze. Eccone un esempio. Al solido $S'V'$ (che per ora non si considera come grave) (*Fig.* 21) sia applicato il peso P nel punto O del suo segmento VV'. I piani BS, BV' sono rettangolari, e la configurazione della fascia $S'V'$ dipende dalla natura della curva S' V, che determina il profilo del solido. Può questo solido fissarsi in un muro in tre maniere: 1.° coi lati BS', CS verticali, e col piano BV' inferiore; 2.° coi lati CS, BS' verticali parimente, ma col piano BV' superiore; 3.° coi lati CB, SS' verticali in modo, che l' area CSV' formi la base del solido:

Sia per tanto piantato nel muro nella prima maniera, e

la sezione BS parallela alla sezione bs' sia un rettangolo. Sia $Vb = x$; $bs = y$; $VV' = cb = c$. Il momento di resistenza della sezione $bs' = cy$ sarà $tcy . \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} tcy^2$ (570); e il momento del peso P è px. Dunque perchè sia costante per tutte le sezioni il rapporto de' momenti della resistenza, e del peso, dovrà per tutte le sezioni esser costante il rapporto $\frac{1}{2}\ tcy^2 \quad px$, ovvero $y^2 : x$, essendo costanti per ipotesi le quantità p, c, t. Lo stesso ha luogo pel caso, che il solido sia fissato nel muro nella seconda maniera. Ma la ragion costante $y^2 : x$ conviene a una parabola, che abbia VB per asse, V per vertice. Dunque perchè nel dato solido situato nelle due indicate maniere sia costante il rapporto dei momenti della resistenza, e del peso, bisogna, che VS' sia una parabola. E siccome nel caso d' equilibrio $\frac{1}{2} tcy^2 = px$; così sarà $y^2 = \frac{2px}{ct}$, e il parametro dell' asse di questa parabola sarà $\frac{2p}{ct}$.

Ma piantato il solido nella terza maniera, il momento della resistenza sarà $\frac{1}{2}\ tc^2y$; quello del peso px; e la loro ragione $y : x$; onde S' V sarà una retta; e il solido sarà un cuneo rettilineo. E siccome nel caso d' equilibrio si ha $\frac{1}{2}\ tc^2y = px$; sarà $tc^2 : 2p :: x : y$, analogia, che determina il triangolo BSV, che forma la pianta del cuneo.

* 586. Ma la potenza, che tende a rompere il solido può essere il solo peso della porzione sVb. In tal caso il momento della resistenza della sezione sarà sempre mst; ma diverso sarà il momento della forza, che risulterà dal prodotto del peso specifico della porzione sVb del solido nella distanza n' del centro k di gravità dalla verticale, che passa pel punto b. Onde se dicasi v il volume, g la gravità, talchè il peso del segmento sVb sia gv, il momento di esso sarà gvn'; e quindi 1.° Si avrà l' equilibrio, quando sia $mst = gvn'$.

* 587. 2.° Il momento gvn' in un solido prismatico andrà crescendo come il quadrato della sua lunghezza. Poichè allungandosi il prisma, o cilindro, si aumenta la massa gravitante in proporzione dell' allungamento; e parimente in proporzione dell' allungamento si aumenta la distanza n'.

588. 3.° Se siano due prismi simili della stessa materia,

si esprimeranno per mst, $m' s' t$ i momenti del peso. Ma egli è chiaro, che le ragioni $mst : m' s' t$; $gvn' : gv'n''$ non possono esser simili, quando non sian ragioni d'eguaglianza, cioè quando i due solidi non siano anche eguali. Poichè se fosse $mst : m' s' t :: gvn' : gv'n''$; $ms : m's' :: gvn' : gv' n''$; essendo per la somiglianza dei solidi $m : m' :: n' : n''$, sarebbe $s : s' :: gv : gv'$, cioè si avrebbero i pesi come le basi, o come i quadrati dei lati omologhi; lo che è assurdo, giacchè i pesi, o le masse sono come i cubi dei lati. Dunque tra tutti i solidi simili d'egual materia obbligati con un capo in un piano verticale un solo può aversene, in cui il momento del proprio peso per ispezzarlo sia in equilibrio col momento della resistenza. In tutti gli altri il momento della resistenza sarà maggiore, o minore di quello del peso, secondo che le dimensioni ne saranno maggiori, o minori.

* 589. Quindi è, che molto anderebbero errati coloro, i quali credessero, che aumentando secondo un numero q le dimensioni di una macchina, per es. di una leva capace d'alzare una massa M, potesse ridursi capace di alzarne un'altra $= q\,M$. Poichè lo stesso peso della leva tendendo a spezzarla, può crescer tanto la ragione del momento di questo peso al momento di resistenza, che essa ne venga effettivamente fiaccata.

Deesi questa importantissima osservazione al Galileo, che ne dedusse « *l'impossibilità del poter non solamente l'arte, ma la Natura stessa crescere le sue macchine a vastità immensa; sicchè impossibile sarebbe il fabbricare navilj, palazzi, o templi vastissimi, li cui remi, antenne, travamenti, catene di ferro, ed in somma le altre lor parti consistessero; come anche non potrebbe la Natura far alberi di smisurata grandezza, poichè i rami loro gravati dal proprio peso finalmente si fiaccherebbero; e parimente sarebbe impossibile fare strutture di ossa per uomini, cavalli, o altri animali, che potessero sussistere, e far proporzionatamente gli uffizj loro; mentre tali animali si dovessero augumentare ad altezze immense; se già non si togliesse materia molto più dura, e resistente della consueta, o non si deformassero tali ossi sproporzionatamente ingros-*

sandoli, onde poi la figura, ed aspetto dell' animale ne riuscisse mostruosamente grosso » (Dialogo secondo prop. VIII).

* 590 Tutto ciò, che abbiam detto fin qui si avverrebbe sempre rigorosamente, e precisamente in pratica, se fosse rigorosamente, e precisamente vera l' ipotesi, su cui ci siam fondati col Galileo primo autore dell' esposta dottrina; vale a dire, se tutte le parti delle sezioni dei corpi si strappassero contemporaneamente nel caso della rottura, come se il corpo fosse schiantato da un peso agente in direzione normale alla sezione, che si dee staccare. Ma questo non suole avverarsi mai quando il peso agisce trasversalmente, perchè le fibre dei solidi essendo in generale tutte più o men flessibili, si curvano nel primo momento della rottura, e quindi il centro di coesione più non combina col centro di gravità.

Il Leibnitz suppose, che per l' azione del peso, onde si produce la frattura, rotando la sezione, che si stacca intorno al suo lato inferiore, gli elementi contigui a questo lato non soffrano distrazione alcuna; gli altri siano tanto più distratti, quanto son più lontani dal detto lato; e la loro resistenza sia proporzionale alla distrazione, che soffrono (*V. Acta Erud. Lips.* 1684). Ma le sperienze del Musschenbroek (*Introd. ad cohaerentiam corporum, ec.*) mostrarono, che anche questa ipotesi non è conforme alla verità. Volendo pertanto una rigorosa esattezza nella pratica della dottrina sopra esposta, converrebbe per ogni caso particolare correggere l' errore. Quest' errore per altro nell' ipotesi galileiana è sì piccolo, specialmente ove si tratti di legni; che può impunemente trascurarsi. Rilevasi ciò dall' esperienze del Musschenbroek, e specialmente da quelle del Buffon (*Mém. de l' Academ. des Sci. de Paris an* 1740, 1741). I resultati ottenuti da quest' ultimo mostrano, che l' esperienza concorda colla teorica, se si abbia riguardo all' estendibilità, ed elasticità delle fibre legnose, e all' adesione, che esse hanno l' una all' altra minore assai dell' adesione scambievole de' loro elementi. Nasce da queste particolari circostanze,

1.° Che i prismi di legno caricati di peso si pieghino assai prima di rompersi;

2.° Che nelle grandi lunghezze la flessione sia più considerabile;

3.° Che aggravandosi d' alto in basso un prisma qualunque finchè riducasi in procinto di rompersi, alcune fibre longitudinali si allunghino, e si distendano; altre si raccorcino, o rientrino. Quindi avviene, che la rotazione del prisma sulla sezione di rottura non si fa realmente nella linea inferiore di detta sezione, ma in una linea parallela alla medesima, e tanto più alta, quanto minore è la lunghezza del pezzo da rompersi; dimodochè variano corrispondentemente le ragioni dei due momenti della forza, e della resistenza; e questi sono nelle sezioni simili proporzionali vicinissimamente ai cubi dei lati omologhi, come dietro le orme del Galileo gli abbiamo teoricamente trovati sopra al n.° 582.

Dunque per far uso della dottrina fin qui stabilita si comincerà dal ricercare coll' esperienza la ragione d' un peso, che può schiantare direttamente un solido d' una data materia in una sua sezione, al peso, che può obbligarlo a rompersi trasversalmente nella sezione stessa essendo applicato ad una determinata distanza. Starà questo al peso capace di rompere in qualunque altra simile sezione un solido della stessa materia, come il cubo di un lato normale all' asse di rotazione nella prima sezione al cubo del lato omologo nella seconda, quando siano i pesi applicati a eguali distanze dai piani verticali, in cui sono fissati i solidi. Che se i pesi siano applicati a varie distanze, sarà il peso capace di rompere il solido nella prima sezione al peso, che può romperlo nella seconda, in ragion composta della diretta dei cubi dei lati omologhi, e della reciproca semplice delle distanze dei pesi dalla sezione di rottura. Egli è poi chiaro, che questa sezione, a circostanze pari d' altronde, è quella contigua al piano verticale, in cui è incastrato il solido, giacchè questa essendo la più lontana dalla potenza, dee soffrirne il più gran momento.

* 591. La potenza applicata al solido parallelamente alla sezione da distaccarsi per la rottura può talvolta trovarsi nel piano stesso della sezione da distaccarsi in modo da tendere non già a farla rotare, ma a farla strisciare sulla sezione

contigua. La resistenza, che il solido oppone in tal caso alla rottura è detta *trasversa* dal Vicat in una Memoria relativa alla rottura dei corpi, di cui è un cenno nel T. 36 degli Ann. di Chimica, e di Fisica *p.* 96. Di questa resistenza non parliamo, perchè la dottrina di essa non si riferisce a quella del vette. Gli Studiosi della Meccanica pratica potranno consultare questa Memoria: troveranno poi nel Trattato di Meccanica teorica, pratica, e descrittiva del sig. Gregory stampato a Londra nel 1806 una serie di belle esperienze istituite da esso, e dall' Emerson sulla tenacità di moltissimi corpi, i resultati delle quali sono anche riferiti nel tom. 34 della Biblioteca Britannica di Ginevra. Consulteranno pur con vantaggio le *nuove sperienze sulla forza de' materiali* di G. Rennie nelle Tran. Fil. per l' anno 1818; la M.ª *On the transverse strain, and strength of materials by Mr. Eaton Hodgkinson* inserita nel T. IV delle Mem. di Manchester, *Londra* 1824 *p.* 225; e l' Opera del Navier intitolata *Résumé des leçons données à l'Ecole des Ponts, et chaussées*.

* 592. Passiamo ora all' esame del terzo caso.

Allorquando un solido appoggiato su due sostegni si rompe per l' azione di un peso, che lo preme, le due sezioni, che si staccano, rotano intorno ad un asse, che è l' intersezione del piano della loro unione col piano, che ne limita l' estremità superiore. È chiaro da ciò, che intanto il solido si rompe, in quanto i due sostegni reagiscono alla pressione del peso; e che questa reazione è la potenza, che produce la rottura. Quello dunque, che nell'esame del secondo caso abbiam detto della forza, che agisce parallelamente alla sezione di rottura, conviene in questo caso alla reazione dei sostegni, che è eguale alla pressione da essi sofferta d' alto in basso, e agisce in senso opposto.

Nel cercare le condizioni d' equilibrio tra questa reazione, e la resistenza del solido alla rottura, supporremo, che mentre un segmento del solido si stacca dall' altro, e rota, l' altro stia immobile; supposizione, che trattandosi d'equilibrio, è evidentemente permessa.

Pertanto il peso *P*, che grava il solido AGCH (*Fig.* 22) appoggiato a due sostegni A, C sia applicato all' asse AC nel punto L, che è nella medesima verticale col centro di

gravità. La pressione sofferta dal sostegno A, e la sua reazione secondo AB si esprime per $\frac{P.LC}{AC} = x$. La qual reazione tende a spezzare il solido in una sezione qualunque GH con un momento $= x.GB$, se da G sia normalmente condotta GB sopra AB. Ma questa reazione è in sostanza lo sforzo del peso *P* per rompere il solido. Il momento dunque di esso peso per ispezzare il solido nella sezione GH sarà espresso per $x.\ GB = \frac{P.LC.GB}{AC}$. E poichè il momento della resistenza, che il solido oppone alla rottura è come sopra (580) *mst*, avremo per l'equilibrio $mst = x.GB = \frac{P.LC.GB}{AC}$.

* 593. Se pertanto il solido sia prismatico, i due sostegni in linea orizzontale (*Fig.* 23), e la sezione GH fatta da un piano verticale, e perpendicolare all'asse FV; il profilo BC del solido sarà un rettangolo; avremo BG = AH; il punto L caderà nella base del profilo; e il momento di *P* per rompere il prisma nella sezione ML, che è nella propria direzione, sarà $= \frac{P.LC.AL}{AC}$.

* 594. Or siccome $AI > AH$; così il peso *P* tende con maggior momento a rompere il solido nella sezione LM, cui è applicato, che nella sezione GH. Essendo poi il rettangolo AL . LC massimo quando LC = AL; il peso *P* eserciterà il massimo momento per romper il solido, quando sarà appeso al punto medio della linea AC.

* 595. Sia ora immobile il segmento MA. La reazione $y = \frac{P\ LA}{AC}$ del sostegno C tende a schiantare il solido nella sezione ML con un momento espresso per $\frac{P.LA\ LC}{AC}$; cioè con un momento eguale a quello, con cui tende a schiantarlo nella stessa sezione la reazione *x*. Anzi generalmente l'espressione del momento, con cui la reazione *y* del sostegno C tende a schiantare il solido in qualunque altra sezione GH, o sia a staccare il segmento CG da GA, è eguale a quella del momento, con cui la reazione *x* ten-

de a staccare il segmento GA da GC. Infatti il momento di y è $\frac{P.LA.GD}{AC} = \frac{P.LA.CH}{AC}$. Ma siccome a questo momento si oppone il momento $P.LH$ del peso P, che tende a tener fisso nel suo luogo il segmento GC; così la vera espressione del momento di y sarà

$$\frac{P.LA.CH}{AC} - P.LH = \frac{P.(LA.CH - AC.CH)}{AC} =$$
$$\frac{P[(AH + HL)(HL + LC)}{AC} - \frac{(AG + HL + LC)HL]}{AC} =$$

$\frac{P.AH.LC}{AC}$. E tale è appunto l'espressione del momento di x (592). Laonde, generalmente parlando, applicato a un solido BC prismatico un peso P, qualunque sezione GH se ne consideri per la rottura, ciascuno dei due segmenti GA, GC fa un eguale sforzo per staccarsi dall'altro, o sia ambi i sostegni reagiscono con egual momento per ischiantare il solido.

* 596. Quello, che abbiam detto d'un solido prismatico può dimostrarsi colla più gran facilità ancora d'un solido piramidale: ma noi non dobbiamo trattenerci più lungamente su tal proposito; e perciò lasciamo anche di considerare il caso, in cui il peso P non sia nella stessa verticale col centro di gravità.

Gli Studiosi della Meccanica pratica potranno consultare sull'articolo delle pressioni, e delle resistenze dei solidi alla rottura il dialogo secondo del Galileo, il trattato *delle resistenze* cominciato dal Viviani per illustrare le opere del Galileo, e terminato dal P. Grandi, e il lib. 2 della Dinamica del P. Mariano Fontana.

* 597. E qui sarebbe forse opportuno di aggiungere come per appendice alle dottrine ultimamente esposte qualche considerazione sulla resistenza dei solidi alla compressione, alla rottura, che quindi si può produrre, ed allo *schiacciamento*. Ma non dovendo noi diffonderci troppo sopra articoli, che interessano principalmente la pratica, noteremo solo, che il Poisson ha pubblicato un pregevolissimo lavoro teorico sulla compressione di una sfera vuota (*Mém. de l'Ac. des Sc. an.* 1827, 28). Si son fatti pure degli sperimenti e calcoli

su gli effetti della violenta compressione dei solidi, e si è concluso, che un solido prismatico situato verticalmente intanto si rompe per l'azione di un peso collocato sulla sua estremità superiore, in quanto i solidi non hanno generalmente le fibre perfettamente rigide, e non sono perfettamente omogenei, onde per l'azione del peso sovrastante cedendo da una parte più, da un'altra meno, s'incurvano; ed incurvati che siano, l'azione del peso li porta alla rottura. L'Eulero avea sottoposta al calcolo (*Mém. de l'Acad. de Berlin* 1757), ed il Musschenbroek all'esperienze la dottrina della resistenza di tal genere; e dai resultati ottenuti dall'uno, e dall'altro si era dedotto, che la resistenza di colonne simili ad esser rotte da pesi loro sovrapposti sono in ragion composta della diretta dei cubi dei diametri, e della inversa de'quadrati delle lunghezze. Ma recentemente le sperienze del Rondelet sulla resistenza allo stiacciamento delle pietre, del Rennie sulla resistenza dei legni, e de'metalli han dati dei resultati più interessanti, e più precisi; e trovansi riportati nell'opera del Navier intitolata *Resumé des leçons données à l'Ecole Royale des Ponts, et chaussées*, e in compendio negli El. di Fisica del Pouillet (*T.* 2. *par.* I, *p.* 74).

Puleggia, o Carrucola.

598. La puleggia è un cilindro di piccola altezza, che nella superficie convessa ha una scanalatura, in cui si pone una fune, che stirata lo fa girare intorno al proprio asse. In due maniere specialmente si adopra la carrucola, cioè tenendone fisso, o lasciandone mobile il centro; e quindi due generi di carrucole si distinguono, le une diconsi *fisse*, le altre *mobili*. Fissa si chiama quella carrucola, che quando agisce ha il centro invincibilmente sorretto. Mobile è quella, che mentre agisce è trasportata dall'azione della potenza P, o della resistenza R.

599. Ad un capo della fune avvolta alla carrucola fissa MKN (*Fig.* 24) sia applicata la forza P, all' altro la resistenza R. Per determinare la condizione dell' equilibrio tra P, ed R avvertiremo, 1.° che esse possono considerarsi come due potenze, le quali applicate a' punti M, N, in cui la fune si scosta dalla puleggia, tendono a farla rotare intorno all' asse rappresentato da K secondo le respettive direzioni MP, NR; onde pel caso d' equilibrio dovranno essere eguali i momenti di P, e di R riferiti al centro K: 2.° che le porzioni MP, NR delle funi, o delle direzioni di P, e di R sono respettivamente tangenti ai punti M, N; sì che la distanza dal centro K ne sarà respettivamente misurata dai raggi MK, NK. Avremo dunque per l' equilibrio P MK $=$ R. NK. Ma MK $=$ NK : dunque $P = R$. Dunque perchè la potenza, e la resistenza P, R applicate per mezzo della fune PMNR alla puleggia MN siano in equilibrio, debbono essere eguali.

Qnindi

600. 1.° Se una stessa fune passi per più carrucole K, K' (*Fig.* 25), le potenze P, R applicate alle carrucole estreme della serie debbono per l' equilibrio essere eguali; poichè la tensione della fune m n servendo in tal caso di resistenza nella carrucola K, di potenza nella K', debbe essere eguale a P, e ad R, le quali per conseguenza saranno eguali tra loro.

601. 2.° La carrucola fissa non apporta vantaggio alcuno alla forza, ma serve solo a dirigerla.

602. Ora la fune TMNP fissa nel punto T avvolgasi alla carrucola mobile MQN (*Fig.* 26), e la resistenza R sia appesa al centro K della carrucola per mezzo di una cassetta rappresentata dalla linea KR, che ne

esprima anche la direzione, come la parte NP della fune esprime quella della potenza, che si suppone applicata alla sua estremità.

La potenza P tende a far rotare secondo NP la puleggia intorno al punto d' appoggio T, la cui azione si riporta al punto di contatto M, mentre la resistenza R tende pure a farla rotare intorno al punto stesso in senso opposto secondo KR. Per l' equilibrio dunque dovrà aversi l' eguaglianza dei momenti della forza; e della resistenza riferiti al punto M. Conducansi pertanto ai punti M, ed N, in cui la fune si stacca dalla carrucola i raggi KM, KN del circolo, che le serve di base (con tal circolo indicheremo sempre la puleggia) e la corda MN, che sarà divisa in mezzo dalla normale KR; e si tiri la normale ME sulla direzione di P prolungata in E. Avremo per l' equilibrio $P.\,\mathrm{ME} = R.\,\mathrm{MI}$, o sia $P : R :: \mathrm{MI} : \mathrm{ME}$. Ma i triangoli rettangoli KMI, EMN essendo simili, si ha $\mathrm{MI} : \mathrm{ME} :: \mathrm{MK} : \mathrm{MN}$. Dunque $P : R :: \mathrm{MK} : \mathrm{MN}$, cioè nella puleggia mobile la forza sta alla resistenza, come il raggio sta alla corda MN, che unisce i due punti, nei quali la fune abbandona la puleggia. Quindi

603. 1.° $P = \frac{R.\,\mathrm{MK}}{\mathrm{MN}} = \frac{aR}{c}$, detto a il raggio, c la corda. 2.° Se la corda diventi eguale al raggio, sarà la forza eguale alla resisteuza. Quanto più poi si diminuirà la corda, tanto più dovrà per l' equilibrio aumentarsi la forza. Onde la puleggia favorisce la forza, finchè si riduca la corda MN eguale al raggio: oltre quel punto bisogna per l' equilibrio una forza sempre maggiore della resistenza.

604. 3.° Il minimo rapporto del raggio alla corda avendosi quando la corda si confonde col diametro

(giacchè allora la corda è massima) ; il massimo quando la corda svanisce, e diventa minima : la minima forza bisognerà, quando la corda è eguale al diametro ; la massima, quando la corda è eguale a zero.

Ma quando la corda MN è eguale al diametro essendo retti gli angoli KMT, KNP, le direzioni delle funi son parallele, e si ha $P : R :: 1 : 2$. Dunque allorquando le direzioni delle funi sono parallele, bisogna una forza eguale alla metà della resistenza ; e questa è la minima. Quando poi la corda svanisce, abbiamo $\frac{MK}{NM} = \frac{MK}{o} = \infty$; e ciò perchè è impossibile, che due forze unite ad angolo retto, quali sarebbero allora la potenza, e la resistenza, si facciano equilibrio ; onde bisogna in tal caso per l'equilibrio una forza infinita, o una resistenza $= o$.

605 Ma nella teorica della carrucola non dee trascurarsene il peso. Se il centro di gravità coincida col centro della carrucola, se ne considererà il peso come un aumento della resistenza. Se non coincida, qualora il peso della carrucola abbia una sensibil ragione a quello di R, e di P, converrà riguardarlo come un' altra resistenza, comporlo con quella applicata al centro, e prender la risultante come una resistenza unica, che debba esser in equilibrio colla potenza applicata alla fune.

606. Dopo tutto ciò facilmente si dà la teorica del complesso di più carrucole mobili.

Questo complesso indicato col nome di *polispasto*, o *taglie* si suol disporre in due maniere. 1.° Talvolta ciascuna carrucola è sostenuta da una fune distinta in guisa da far figura di resistenza riguardo alla superiore, di potenza riguardo all' inferiore ; come nella figu-

ra 27; e la fune, che attaccata in a sorregge l' ultima puleggia V avvolgendosi alla puleggia fissa Q sostiene colla sua estremità libera la potenza P, che fa equilibrio a tutto il sistema. 2.° Talvolta tutte le pulegge mobili sono fissate nella cassetta orizzontale MN (*Fig.* 28) parallelamente sottoposta a un sistema di carrucole fisse disposte nella cassetta AB in modo, che la stessa fune fermata in M s' avvolga a tutte le fisse, e le mobili; e al di là dell' ultima fissa sostenga la potenza P.

Siano disposte le carrucole nella prima maniera. Ripetendo per ciascuna puleggia del sistema ciò, che abbiam detto della ragione tra la forza, e la resistenza nell' equilibrio in una sola puleggia, arriveremo a concludere, che la potenza P applicata in un sistema all'ultima fune dee stare alla resistenza R appesa alla prima puleggia, come il prodotto dei raggi di tutte le pulegge al prodotto delle respettive corde degli archi circondati in ognuna dalle funi. Chiamando infatti a, a', a'', ec. i raggi delle carrucole; c, c', c'', ec. le corde; R, R', R'' le resistenze per le pulegge C, F, V, poichè ogni puleggia fa da resistenza relativamente alla superiore, da potenza relativamente all' inferiore, avremo cominciando dalla puleggia V, $P=\frac{a''R''}{c''}$; $R''=\frac{a'R'}{c'}$; $R'=\frac{aR}{c}$; e quindi $P=\frac{a''R''}{c''}=\frac{a''a'R'}{c''c'}=\frac{a''a'aR}{c''c'c}$; e perciò $P:R::a.a'.a''.$ ec. $:c.c'.c''$, ec. Se pertanto siano tutti eguali i raggi, e tutte eguali le corde, avremo per un numero qualunque n di pulegge $P=\frac{Ra^n}{c^n}$; e in oltre, se le direzioni di tutte le funi sian parallele (nel

qual caso $c = 2a$) sarà $P = \frac{R}{2^n}$, onde $P : R :: 1 : 2^n$. Quando dunque in tal sistema le pulegge sono tutte eguali, e le funi parallele, la forza sta alla resistenza, come l' unità a quella potenza di 2, che ha per esponente il numero delle pulegge mobili. Notisi, che la puleggia fissa Q detta di *rimando* non serve, che a render più comoda l' applicazione della forza.

607. Siano ora le pulegge disposte nella seconda maniera. Conviene in tal caso osservare, 1.° che per questa disposizione le pulegge mobili fanno la figura solo di resistenza, e che ciascuna di esse sostiene una parte r, r^{I}, r^{II}, ec. della resistenza R; 2.° che posta la potenza in equilibrio colla resistenza, tutte le funi debbono essere egualmente tese, e perciò tutte le potenze P, p, p^{I}, p^{II}, ec., che corrispondono alle tensioni, debbono essere eguali. Ora ritenute le denominazioni di sopra, avremo $p = p^{\text{I}} = \frac{ar}{c}$; $p^{\text{I}} = p^{\text{II}} = \frac{a^{\text{I}} r^{\text{I}}}{c^{\text{I}}}$; $p^{\text{II}} = p^{\text{III}} = \frac{a^{\text{II}} r^{\text{II}}}{c^{\text{II}}}$, ovvero essendo $p = p^{\text{I}} = p^{\text{II}} = P$;

$$\frac{cP}{a} + \frac{c^{\text{I}}P}{a^{\text{I}}} + \frac{c^{\text{II}}P}{a^{\text{II}}} + P = r + r^{\text{I}} + r^{\text{II}} \text{ ec.} = R,$$

o sia $P\left(\frac{c}{a} + \frac{c^{\text{I}}}{a^{\text{I}}} + \frac{c^{\text{II}}}{a^{\text{II}}} + 1\right) = R$; e fatto

$a = a^{\text{I}} = a^{\text{II}} = 1$; $P : R :: 1 : c + c^{\text{I}} + c^{\text{II}} + 1$. Che se le funi siano parallele, e perciò $c = c^{\text{I}} = c = 2a = 2$; essendo n il numero delle pulegge, sarà $P : R :: 1 : 2n + 1$. Ma nel caso contemplato $2n + 1$ esprime il numero delle funi (si suppone, che l' ultima fune vada a finire nell' incassatura mobile, e contribuisca ancor essa a sostener la resistenza). Dunque quando le funi siano parallele, starà la forza alla resi-

stenza, come l' unità al numero delle funi, che sostengono il sistema mobile.

608. La legge stessa vale anche per un sistema verticale di pulegge mobili (*Fig.* 29). Solo dee avvertirsi, che in questo sistema i diametri delle pulegge debbono esser necessariamente ineguali, perchè le funi possano esser parallele. E facilmente si comprende, che per quest' oggetto i diametri delle successive pulegge, che vengono avvolte dalla stessa fune debbono star tra loro nella proporzione dei numeri naturali 1, 2, 3, ec.; poichè la direzione del tratto di fune, che è attaccato alla cassa delle pulegge fisse passando pe' loro centri, la prima puleggia mobile dee rimaner tutta tra il centro, e la periferìa della prima fissa; onde prendendo per unità il diametro di quella, esso sarà la differenza, che passa tra' diametri delle successive pulegge.

Argano.

609. La macchina, che s' indica con la generica denominazione di *Argano* è composta di un cilindro AB (*Fig.* 30), e di una rota HG, che hanno l' asse comune. Possono alla rota sostituirsi o due manubrj confitti ad angoli retti nel cilindro, o un tamburo capace di contenere degli animali attaccato al medesimo normalmente all' asse. Si fa girare il cilindro applicando alla rota, o successivamente ai manubrj una potenza *P*, oppure facendo muovere degli animali nella parte interna della periferìa del tamburo. Mentre il cilindro gira si avvolge al medesimo la fune m n; e fa così, che si muova il peso, o la resistenza *R*, cui essa è fermata. Se il cilindro è situato orizzontalmente la macchina

chiamasi *burbera*, se verticalmente, *argano* propriamente detto.

610. Nel determinare le condizioni dell' equilibrio tra la potenza, e la resistenza in questa macchina supporremo, che le direzioni d' entrambe siano in piani normali all' asse del cilindro, e perciò parallele tra loro. Se non lo siano, conviene risolverle respettivamente in due, una normale, l' altra parallela al detto asse. In tal caso, siccome la parte parallela nulla contribuisce alla rotazione del cilindro, così dee per l' equilibrio considerarsi soltanto quella, che li è normale. Supporremo parimente, che le direzioni della potenza, e della resistenza sian respettivamente tangenti alla periferia della rota, e del cilindro. Se fosser secanti, si risolverebbero ciascuna in due, una normale a' raggi respettivi della rota, e del cilindro, l' altra nella direzione di essi. E poichè le prime soltanto agirebbero per far girar la rota, e il cilindro; le prime soltanto dovrebbero considerarsi.

611. Pertanto l' asse del cilindro sia orizzontale (per fissar le idee); la resistenza, o il peso R sia attaccato alla fune verticale tangente al cilindro nel punto d, in cui se ne distacca, come la direzione della forza P è tangente alla rota similmente nel punto H. Dall' asse del cilindro conducasi al punto d il raggio Od, che dovendo esser normale alla fune verticale, sarà orizzontale. E dal punto C, dove il piano verticale della rota HG taglia l' asse del cilindro, conducasi un altro raggio orizzontale Cb del cilindro parallelo ad Od, e diretto in senso opposto. Questo raggio è compreso nel piano della rota. Alla estremità b di questo raggio suppongo applicate due forze R', R'' egnali tra loro, e ad R, che agiscano verticalmente in senso contrario; R

secondo bQ; R'' secondo bq. Ciò può farsi, senza che ne resti alterato per niente lo stato della questione, com'è evidente. Abbiamo dunqne tre forze parallele eguali, di cui due R, R' agiscono nel senso medesimo, l'altra agisce in senso opposto. Ora tirata la linea bd, questa taglierà l'asse del cilindro in un punto φ, che la dividerà in due parti eguali. Per questo punto (142) passserà la risultante delle due forze parallele R, R' equivalente a un peso $= 2R$ applicato al punto φ. Questa vien distrutta dalla reazione dell'asse del cilindro verticalmente immobile; onde non si avrà più, che la forza $R'' = R$, e la forza P applicata in H, entrambe nel piano stesso. Ora la forza P tende a far girare il cilindro secondo HP, la forza R'' tende a farlo girare in senso opposto, precisamente come R, intorno al medesimo asse. Perciò nel caso d'equilibrio dovranno eguagliarsi i momenti della potenza P, e della resistenza R'', o R riferiti al detto asse. Essendo pertanto la distanza di P dall'asse eguale al raggio A della rota, e la distanza di R eguale al raggio a del cilindro, avremo $A \cdot P = a. R$; $P : R :: a : A$; cioè per l'equilibrio nell'argano, o nella burbera, dee stare la potenza alla resistenza, come il raggio della base del cilindro al raggio della rota.

612. Dunque qualora si allunghi il raggio della rota, si accorci quello del cilindro, si diminuirà la quantità della forza necessaria per l'equilibrio in questa macchina.

Ma per evitare ogni errore nella misura dei raggi sì della rota, o del tamburo, come del cilindro, vuolsi avere una speciale avvertenza ai casi, in cui il tamburo è mosso da animali in esso contenuti, o al cilindro è attaccato un canapo di notabil diametro, che dopo al-

cune rivoluzioni debba ravvolgersi sopra se stesso. Nel primo caso, se per es. tre animali si trovano ne' punti D, G, F del cerchio DLQ (*Fig.* 31), che rappresenta una sezione ad angoli retti del tamburo annesso al cilindro, le lunghezze dei raggi da calcolarsi (611) sono CK = *cos.* LKD, EK = *cos.* LKG, NK = *cos.* LKF: talchè l' espressione del momento della forza nell'equazione fondamentale (611) dovrà sempre risultare dalla somma del prodotto dei pesi dei tre animali nei coseni degli angoli, che col raggio orizzontale KL fanno i raggi tirati dal centro K ai punti, in cui essi animali si trovano.

Nel secondo caso poi, siccome la resistenza può supporsi appesa all' asse del canapo, così quanto questo sarà più grosso, tanto sarà più lontana la direzione di essa dall' asse dei momenti; onde per la necessaria esattezza converrà nell' espressione del momento della resistenza aggiugnere al raggio del cilindro il raggio del canapo $n + 1$ volte, se n sia il numero delle rivoluzioni, che esso avrà dovuto fare sopra di se al tempo, in cui vuol calcolarsene l' equilibrio.

613. Le Rote dentate sono un complesso d' argani. In molti modi possono queste distribuirsi; ma uno dei più comuni è il seguente. A diversi cilindri AB, CD, EF, GH (*Fig.* 32) sono attaccati come ad assi respettivi un rocchetto LI, NO, TX, e una rota KQ, IM, OS, XY in maniera, che i denti delle rote nel muoversi incontrino, o *ingranino* i denti, o *ali* dei rocchetti; talchè mentre il rocchetto gira inserendo successivamente i suoi denti tra quelli della rota, fa, che la rota giri essa pure. Messa in moto la prima rota RQ, o il manubrio Aa eguale al raggio della detta prima rota da una potenza *P*, si muove l' asse AB, e con esso il roc-

chetto LI, che per mezzo della rota IM imprime il moto all' asse CD, da cui lo riceve il rocchetto NO, e nella stessa maniera lo comunica all' asse FE; dal quale passa finalmente all' ultimo asse GH. In questo è stabilmente infilato un cilindro lm, che nel rotare insieme coll' asse avvolge alla sua superficie la fune pq, la quale così avvolgendosi muove il peso, o resistenza R, che tende a far girare il sistema delle rote in un senso opposto a quello, in cui lo fa girare la potenza P.

Dunque ognuno degli assi AB, CD, ec. è un argano, nel quale è applicata la potenza alla rota, la resistenza al rocchetto. Laonde perchè si abbia equilibrio conviene, che in ognuno degli assi stia la forza alla resistenza, come il raggio a del rocchetto al raggio A della rota: e perciò dee la forza F applicata alla prima rota stare alla resistenza R applicata all' ultimo rocchetto, come il prodotto dei raggi dei rocchetti al prodotto di quelli delle rote, computando tra' rocchetti anche il cilindro lm, cioè $F : R :: a\,a'\,a''$, ec. : A. $A' \times A''$, ec. (611). Poichè dette R, R', R'' le resistenze in X, O, I, si ha $F = \frac{a\,R''}{A}$; $R'' = \frac{a'R'}{A'}$; $R' = \frac{a''R}{A''}$; onde $F = \frac{a\,R''}{A} = \frac{aa'R'}{AA'} = \frac{a\,a'a''R}{AA'A''}$. Dunque

614. 1.° Se tutti i raggi delle rote siano tra loro eguali, ed eguali parimente tutti i raggi dei rocchetti, posto n il numero degli assi, sarà $F = \frac{Ra^n}{A^n}$.

615. 2.° Se i raggi delle rote siano molto più grandi di quelli dei rocchetti, anche con un piccol numero di rote potrà una piccola forza far equilibrio a una resistenza grandissima. Così se siano 10 le rote, e il

raggio di esse sia a quello dei rocchetti come 10 : 1, sarà $P = \frac{R}{10000000000}$, cioè il peso d' nna libbra farà equilibrio a dieci mila milioni di libbre.

Piano Inclinato.

616. La semplice enunciazione indica la costruzione di questa macchina, onde senza trattenerci a descriverla noteremo solo, che l' angolo formato dal piano inclinato coll' orizzonte dicesi *angolo di elevazione*; *angolo d' inclinazione* quello formato dalla direzione della forza, che sostiene un corpo sul piano, col piano stesso prolungato, se occorra.

617. Il corpo RZ, cho ha in C il centro di gravità, sia tenuto in equilibrio sul piano inclinato AB (*Fig.* 33) dalla forza f, la cui direzione CK incontrando in K la prolungazione del piano inclinato faccia l' angolo d'inclinazione BKC $= n$. Dal punto C si abbassi la verticale CG direzione della gravità. Rappresentando la potenza f, e la gravità g (che nel caso attuale è la resistenza) per le porzioni QC, CN delle lor direzioni, si compia il parallelogrammo QN. La diagonale CP esprime la resultante delle forze f, g, e la pressione, che ne soffre il piano inclinato. Chiamando adunque p questa pressione, avremo $f : g : p$ :: QC : CN : CP.

È chiaro per tanto, che

1.° La risultante PC dovendo per l' equilibrio esser distrutta interamente dalla reazione del piano inclinato, gli dovrà esser normale.

2.° Il punto P, su cui cade la risultante, sarà il punto fisso d' appoggio, intorno al quale debbon farsi equilibrio la potenza, e la resistenza. E perciò condot-

te dal detto punto P le normali Pb sulla direzione di g, Pa sulla direzione di f, dovrà essere pell'equilibrio (557) f. Pa $= g$. Pb ; o f. *sen.* aCP $= g$. *sen.* PCN.

3.° Tirate pel vertice A del piano inclinato la YF normale su CK, e prolungate le linee BK, BO, OA, finchè s' incontrino in X, in Y, in H; i triangoli BAY, CPN (= CPQ) saranno simili, essendone respettivamente normali tutti i lati; e perciò sarà ang. PCN = ang. ABY $= m$; ang. aCP = ang. BAY; • PN (=QC) : CN : CP :: AY : BY : AB. Avremo dunque

$$f : g : p :: sen.\, m : sen.\, BAY : sen.\, BYA.$$

Quindi

I. Essendo *sen.* BAY = *sen.* FAK = *cos.* AKF $=$ *cos.* n, avremo $f : g :: sen.\, m : cos.\, n$. Dunque nel caso d' equilibrio sul piano inclinato la forza dee stare alla resistenza, come il seno dell' angolo di elevazione al coseno dell' angolo d' inclinazione; onde f

$= \frac{g.\, sen.\, m}{cos.\, n}$. Perciò

618. 1.° Tanto minor forza si richiederà per l' equilibrio, quanto sarà minore il seno d' elevazione, e maggiore il coseno d' inclinazione.

619. 2.° Se la direzione della potenza sia parallela al piano, e perciò $n = 0$; $cos.\, n = 1$; avremo $f : g :: sen.\, m : 1$. Essendo pertanto $sen.\, m : 1$ la minima ragione fra $sen.\, m$, e $cos.\, n$, è chiaro, che per l' equilibrio nel piano inclinato la minima forza bisogna, quando la direzione ne è parallela al piano.

620. 3.° Se la direzione della forza sia normale alla direzione della gravità, o parallela alla base BC, come saranno alterni, e quindi eguali gli angoli m, n; così sarà $f = \frac{g.\, sen.\, m}{cos.\, m}$. Ora posto AO $= a$; $=$ AB $=$

l; $BO = b$, si ha $l\ sen.\ m = a$; $l\ cos.\ m = b$; onde $sen.\ m = \frac{a}{l}$; $cos.\ m = \frac{b}{l}$. Quindi si ridurrà $f = \frac{ag}{b}$; e perciò $f : g :: a : b$; cioè la forza, che agisce nel piano inclinato parallelamente alla base sta alla resistenza, come l'altezza del piano alla base.

621. Su questo teorema si appoggia la teorica di quella macchina, che è conosciuta sotto il nome di *Vite*.

Il piano inclinato AB (*Fig.* 34) rappresenti la sezione di un piccol solido parallelogrammico, o triangolare, ed abbia la base BO precisamente eguale alla periferìa del cilindro AO. È chiaro, che se AB si avvolgerà al cilindro, formerà una spira sul medesimo; e che se molti piani inclinati BEB', B' E' B'', ec. eguali tutti ad ABO si uniscano in diritto, e tutti si avvolgano al cilindro come il primo; quanti saranno questi piani, altrettante spire si formeranno, le quali saranno tra loro distanti per una quantità costante = AO; e potranno essere più, o men vicine, secondo che minore, o maggiore si prende l' altezza AO, che può prendersi ad arbitrio, purchè BO sia sempre eguale alla periferìa del cilindro, cui vuolsi avvolgere. Questo cilindro così contornato di spire dicesi *Maschio della vite:* il filo prominente, che si avvolge al cilindro si chiama *Pane della vite*; e la distanza delle spire, che lo circondano, *Passo delle vite*. Un parallelepipedo MN (*Fig.* 35), che ha nel mezzo un' apertura capace del cilindro AO, e spiralmente incavata in modo, che dentro ai suoi incavi entri il solido, che circonda il cilindro, dicesi *Madre-vite*. Questi due pezzi costituiscono la macchina, di cui si tratta, che si adopra per comprimere,

o per sollevare una resistenza. Nell' uso, che se ne fa talvolta sta immobile la madre-vite, muovendosi il maschio; talvolta stando immobile il maschio, si muove la madre-vite. Ma muovasi l' uno, o l' altro pezzo, non si muove che strisciando per salire, o scendere lungo le spire; e il moto ne è prodotto da una potenza applicata ad una verga parallela alla base del cilindro. Siccome poi la potenza egualmente agisce, ed eguale effetto ne prova la resistenza pel moto tanto dell' uno, quanto dell' altro pezzo; così qualunque dei due pezzi si consideri mobile è indifferente per la teorica.

622. Supponiamo, che il maschio sia verticale, ed immobile, e che per l' azione della potenza F applicata al vette CP fitto nella madre-vite normalmente all' asse del maschio, la sola madre-vite possa muoversi, e trasportar movendosi la resistenza, o peso R attaccato alla medesima.

È chiaro, che ridotta la macchina all' equilibrio, il peso R si appoggia sulla lunghezza delle spire, e sulle medesime è sostenuto da una potenza parallela alla base del maschio. Immaginiamo questo peso diviso in una infinità di piccolissimi elementi r, r^{I}, r^{II}, ec. sorretti sopra altrettanti punti delle spire. Sia segnatamente il piccolo peso r posto sopra una spira, ed ivi tenuto in equilibrio da una potenza φ parallela alla base del maschio, e applicata al punto φ. Se si riguardi AB (621) come sviluppata, o non ancora avvolta al cilindro fino al punto, dov' è situato il peso r, può il peso considerarsi come situato sopra un piano inclinato, che abbia l' angolo B^{II} per angolo d' elevazione. Chiamando pertanto B la base del piano, A la sua altezza, avremo (621) $\varphi : r :: A : B$. Ma la base del piano inclinato è per costruzione eguale alla cir-

conferenza del cilindro, e l'altezza al passo della vite. Detto dunque p il passo, a il raggio C φ del cilindro, e $1 : \pi$ la ragione del diametro alla periferia, avremo $\varphi : r :: p : 2a\pi$.

Suppongasi la potenza F divisa in un' infinità di piccole forze infinitesime, e una di queste $= f$ sia tale, che applicata al vette CP nel punto P tenga in equilibrio il peso r, che era prima equilibrato con φ posta in φ. Siccome queste due forze φ, f applicate a diversi punti producono lo stesso effetto, i loro momenti ne' diversi punti debbono essere eguali; dee cioè essere $\varphi \cdot C\varphi = f \cdot CP$; onde $f : \varphi :: C\varphi : CP :: 2\pi C\varphi : 2\pi CP$. Moltiplicando pertanto questa analogia per la precedente $\varphi : r :: p : 2a\pi$, avremo $\varphi f : \varphi r :: 2\pi p \cdot C\varphi : 4a\pi^2 \cdot CP :: 2\pi p \cdot a : 4a\pi^2 \cdot CP$; $f : r :: p : 2\pi \cdot CP$. Dunque ogni elemento della forza F sta ad ogni elemento del peso R, come l'altezza del passo della vite alla circonferenza, che ha per raggio la distanza del punto, dov'è applicata la potenza, dall' asse del maschio. E siccome i tutti stanno come le loro parti simili, potrà stabilirsi il general teorema « *Nella vite la forza sta alla resistenza, come l' altezza del passo della vite alla circonferenza del cerchio, che ha per raggio la lunghezza del vette, cui è applicata la potenza* ». Laonde tanto minor forza bisogna pell' equilibrio nella vite, quanto ne è minore il passo.

La diminuzione del passo della vite, se fa diminuir la forza necessaria all' equilibrio, fa corrispondentemente aumentar la pressione, che la resistenza esercita sul pane (271). Talchè quando la potenza si riduce piccolissima, la pressione sul pane è quasi precisamente eguale al peso assoluto della resistenza. Potreb-

be dunque facilmente accadere, che se la pressione si esercitasse sopra pochi punti, e il peso fosse notabile, e poco resistente il pane, questo si rompesse, e si guastasse la macchina. Per impedire un tale inconveniente si è immaginato di unire al maschio fisso la madre-vite mobile, costruita come abbiam detto, la quale fa sì, che il peso, o la resistenza da vincersi prema contemporaneamente un certo numero di pani, e che tutti quelli, che son compresi dentro di essa concorrano unitamente a sostenerne la pressione. Quanto maggior numero di giri comprende la madre-vite, tanto maggiore, a circostanze pari, è lo sforzo, di cui essa può esser capace senza lesione della macchina.

623. Ma l' azione della forza applicata alla vite non si trasmette sempre immediatamente sulla resistenza, che dee muoversi. Combinasi talvolta la vite con una rota dentata, e si forma così quella macchina composta, che dicesi *Vite perpetua*. Il *maschio* AB incastra le sue spire fra i denti della rota F (*Fig.* 36) traversata stabilmente nel centro da un cilindro rappresentato da T, cui si appicca una fune, all' estremità della quale sta attaccata la resistenza *P*. Il maschio posto in moto per mezzo del manubrio HK urtando colle sue spire nei denti della rota, la fa girare; e mentre ella gira si avvolge al cilindro T la fune, che così viene a muovere il peso. In tal caso, detta n l' azione delle spire contro i denti della rota, p l' altezza delle spire, o il passo della vite, F la forza applicata in K, R la resistenza, A il raggio della rota, a il raggio del cilindro; avremo per lo stato di equilibrio dalla teorica della vite $F : n :: p : 2\pi$ HK. Ma dalla teorica della rota abbiamo $n = \frac{aR}{A}$ (613). Dunque $F : \frac{aR}{A} :: p : 2\pi$ HK,

o sia $F : R :: ap : 2\pi \text{HK} . \text{A}$; cioè nella vite perpetua la potenza sta alla resistenza come il prodotto del passo della vite nel raggio del cilindro al prodotto del raggio della rota nella periferia, che ha per raggio la distanza dall' asse della vite.

624. II. Ripresa l'analogia fondamentale (617) $f : g : p :: sen.\, m : sen.\, \text{BAY} : sen.\, \text{BYA}$, si osservi, che $sen.\, \text{BAY} = sen.\, \text{FAK} = cos.\, \text{XKB}$; $sen\, \text{BYA} = cos. \text{YAO} = cos. \text{FAH} = sen.\, \text{FHA} = sen. \text{XHO}$. Dunque $f : g : p :: sen.\, m : cos.\, \text{XKB} : sen\, \text{XHO} :: sen.\, m : cos.\, n : sen.\, \text{XHO}$; cioè *la forza, la gravità, e la pressione equilibrate sul piano inclinato stanno tra loro, come il seno d' elevazione, il coseno d' inclinazione, e il seno dell' angolo, che l' altezza del piano fa colla direzione della forza.*

625. Inoltre tirata l' orizzontale FL, abbiamo

$$sen.\, \text{XHO} = cos.\, \text{HFL} = cos.\, \text{KXB} \;(= cos.\, q).$$

Dunque $g : f : p :: cos.\, n : sen.\, m : cos.\, q$; cioè *la gravità, la forza, la pressione in equilibrio stanno tra loro, come il coseno d' inclinazione, il seno d'elevazione, e il coseno dell' angolo, che la direzione della forza fa colla base del piano inclinato.*

* 626. Queste ragioni, e il metodo, con cui le abbiamo trovate ci guidano alla dottrina dell' equilibrio dei corpi, che si appoggiano contemporaneamente sopra più piani inclinati. Questi piani possono essere infinitesimi di quantità, infiniti di numero, o sivvero finiti di quantità, e di numero. Al primo caso si riferisce l'equilibrio dei corpi sopra le curve; al secondo l' equilibrio sopra due, o più piani inclinati. Considereremo separatamente ambi i casi.

627. Supponiamo primieramente, che un peso π sia tenuto in equilibrio sopra qualunque punto M della curva VR (*Fig.* 37) da una potenza diretta secondo MK, cioè al punto K dell' asse verticale VC.

È chiaro, che potrà considerarsi come se fosse tenuto in

equilibrio sopra un piano, che avesse un' inclinazione eguale a quella della tangente al punto, su cui cade la direzione della pressione, che esso vi esercita. Potremo dunque anche nel caso attuale, tirata la NM normale alla curva nel punto M, abbassata la verticale MQ, e compito il parallelogrammo DQ, esprimere la pressione per MP, la forza per MD, e la gravità o peso di π per $MQ = DP$. I triangoli simili MDP, MKN danno $DP : MD : MP :: KN : KM : NM$; onde $MD = f = \frac{DP \,.\, KM}{KN}$; $MP = p = \frac{DP \,.\, MN}{KN}$.

Si tirino le ordinate infinitamente vicine FM, e fm, la quale incontri in r la MQ; e sia $KF = x$, $FM = y$; $Ff = Mr = dx$; $rm = dy$. È noto, che la normale $NM = \frac{y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dx}$; la sunnormale $FN = \frac{ydy}{dx}$; perciò $KN = KF + FN = \frac{xdx + ydy}{dx}$; $KM = \sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Sostituendo dunque questi valori nell' equazioni superiori, abbiamo $MD = \frac{\pi dx \sqrt{(x^2 + y^2)}}{xdx + ydy}$; $MP = \frac{\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{xdx + ydy}$.

Queste espressioni restando variamente determinate, secondo che varia è la natura della curva, danno per ogni curva i valori della forza necessaria all' equilibrio, e della pressione, che si produce.

628. Qui cade in acconcio avvertire, che se due corpi posando sopra i punti M, M' delle date curve MR, M' R', che hanno l' asse comune VC, si tengano reciprocamente in equilibrio per mezzo della fune MKM', che passa sopra una puleggia infinitesima posta in K, saranno eguali le tensioni delle funi KM, KM'. Ma queste tensioni sono le potenze f, f', che tengono equilibrati i pesi. Dunque (617) detta x' la Kg', e y' la g' M', la tensione di KM' sarà $f' = \frac{\pi' dx' \sqrt{(x'^2 + y'^2)}}{\pi' dx' + y' dy'}$; e per la condizione dell' equilibrio $\frac{\pi dx \sqrt{(x^2 + y^2)}}{xdx + ydy} = \frac{\pi' dx' \sqrt{(x'^2 + y'^2)}}{x'dx' + y'dy'}$; ovvero

ponendo $MK = \sqrt{(x^2+y^2)} = z$; $M'K = \sqrt{(x'^2+y'^2)} = z'$, $\frac{\pi dx}{dz} = \frac{\pi' dx'}{dz'}$.

Or siccome $z + z'$ è una quantità costante per costruzione, così $dz + dz' = 0$; $dz = - dz'$, e quindi $\frac{\pi' dx'}{dz'} = - \frac{\pi dx}{dz'}$; $\pi' dx' + \pi dx = 0$. Dunque integrando $\pi x + \pi' x' = Cost.$; e quindi pure $\frac{\pi x + \pi' x'}{\pi + \pi'} = Cost.$

Ma questa espressione indica la distanza del centro di equilibrio, o di gravità dei pesi π, π' dall' asse orizzontale SL, che passa per K principio dell' ascisse d' ambe le curve (253; 176). Dunque questa distanza è sempre la stessa, ovunque siano questi pesi; e perciò può stabilirsi l' importante teorema, che *il centro di gravità di due pesi, che vicendevolmente si sostengano per mezzo di una fune sopra due curve, che abbiano un asse comune, resta sempre nella stessa orizzontale, per quanto varj la situazione dei pesi*.

* 629. Supponiamo in secondo luogo, che sia il corpo ST situato tra due piani inclinati finiti AB, aB in modo, che le linee Cp, Cp' partendo dal centro di gravità C vadano perpendicolari su' detti piani AB, ab (*Fig.* 38). L' uno dei due piani AB farà colla sua reazione la figura della forza f. Chiamando dunque π la nuova pressione, che è eguale alla reazione del nuovo piano premuto, avremo per lo stato d' equilibrio $g : \pi : p$ :: *cos.* XKB : *sen.* ABO : *cos.* KXB (625). Ma *cos.* XKB = *sen.* aBA; *cos.* KXB = *sen.* aBo. Dunque $g : \pi : p$ :: *sen.* aBA : *sen.* ABO : *sen.* aBo. Perciò

$$1.^\circ\ \pi = \frac{g\ sen.\ ABO}{sen.\ aBA};\ p = \frac{g\ sen.\ aBO}{sen.\ aBA}.$$

2.° Il peso g del solido in equilibrio sopra due piani inclinati sta alla pressione su ciascun piano, come il seno dell' angolo, che formano i due piani al seno d' elevazione dell' altro piano.

3.° Le pressioni π, p sono tra loro in ragione inversa de' seni d' elevazione dei piani, su cui si esercitano.

4.° Se aBo = o, la pressione p = o; onde se il piano

aB è orizzontale, tutto il peso è sostenuto da esso, niuna parte da AB.

5.° Se aB è verticale, e perciò *sen.* aBo = 1, sarà $p = \frac{g}{sen.\ a\overline{BA}}$; e siccome Cp' è normale ad aB, questo piano rappresenterà in tal caso una forza, che agisca parallelamente alla base del piano inclinato.

* 630. Dopo tutto ciò, se si supponga per maggior semplicità, che il corpo ST, sia una verga pesante, che avendo in R il centro di gravità (*Fig.* 39) sia appoggiata ai due piani inclinati, sarà ben facile di determinare quali siano le condizioni necessarie, perchè vi stia in equilibrio, ed abbia una stabilità; e quali siano le pressioni sì orizzontali, che verticali da essa esercitate su i punti S, T dei detti piani.

* 631. Col nome di *stabilità* s' intende in tal caso il momento, con cui il peso d' un corpo situato fra due piani inclinati impedisce, che esso corpo sdruccioli lungo i piani, abbassandosi con un suo estremo, ed alzandosi coll' altro. Non può dunque la verga ST situata su due piani inclinati AB, aB avere stabilità, se le reazioni di questi due piani non distruggono interamente gli effetti della sua gravità, o del suo peso. Ora si rappresenti questo peso per la porzione LG della verticale LI, che passando pel centro di gravità ne indichi la direzione, e quindi supponendolo applicato in qualunque punto L, si decomponga secondo le linee LS, LT, che vadano a cadere su i punti estremi della medesima, cioè su i punti di contatto coi due piani. Perchè la verga sia stabile dovranno le reazioni de' due piani interamente distruggere queste due componenti del suo peso: ma ciò non può accadere, se non nel caso, che le loro direzioni siano normali ai piani. Dunque la verga avrà stabilità solo nel caso, che dai punti, in cui ella tocca i piani alzando due normali SL, TL, queste vadano a intersecarsi in un punto della direzione della sua gravità, al qual punto possa supporsi applicato il peso, e decomposto secondo le dette normali.

* 632. Che se la verga non tocchi i piani con due punti soli, ma bensì con una, o due fronti, la reazione dei piani

distruggerà gli effetti della sua gravità, ed essa avrà perciò stabilità, tutte le volte, che le direzioni delle due componenti, in cui ne sia risoluto il peso, caderanno normalmente su qualche punto delle fronti medesime. Quindi è, che

* 633. 1.° Posta su due piani inclinati una verga TS avente una fronte SN, ovvero due verghe TS, SN (*Fig.* 40) unite invincibilmente in S, se dal punto T si alzi una normale al piano aB, e si prolunghi tanto, che tagli la direzione della gravità, e dal punto d' intersezione si conduca un' altra normale all' altro piano inclinato AB; lo strumento TSN avrà stabilità, finchè questa normale caderà dentro la fronte SN. Dopo ciò

* 634. 2.° Facilmente si determina quando, e quale stabilità abbia un solido TtNn appoggiato a due piani inclinati AB, aB. Da' punti T, ed n si alzino due normali ai piani, che s' incontrino in un punto L; e parimente dai punti N, e t si alzino due normali ai piani, che s' incontrino in un punto Q. Qualora la direzione del peso del solido passi per L, o per Q saranno distrutte le pressioni dalla reazione dei piani, e il solido sarà stabile, ma in procinto di sdrucciolare per aB, o per AB, secondo che la mentovata direzione del peso si riduca fuori di L verso X, o fuori di Q verso Z. Laddove, se passerà tra L, e Q per qualunque punto O, siccome le normali abbassate su i piani dalla direzione del peso debbon cader dentro le fronti del solido; così esso avrà una perfetta stabilità.

* 635 3.° Essendo minima la stabilità del solido quando le normali ai piani si riuniscono nel punto Q, o nel punto L, anderà essa divenendo tanto maggiore, quanto questa unione anderà a cader più lontana dai detti punti. Per lo che la massima si avrà, quando la riunione delle normali segue nel punto di mezzo O, cioè quando la direzione del peso taglia in mezzo la linea LQ.

* 636. 4.° Sia ora stabile la verga ST (*Fig.* 39) su i piani inclinati aBo, ABO, e dai punti S, T si alzino le normali SI, Ti. Esse saranno le direzioni delle componenti della sua gravità, o del suo peso, che rimanendo distrutte dalla reazione dei piani esprimeranno le pressioni: e se dal punto L, in cui prolungate si intersecano si abbassi la verticale

LR, ella passerà per il centro R di gravità, e sarà la direzione del peso della verga. Questo peso si esprima per la porzione GL della sua direzione, e compiasi il parallelogrammo Pp. Il lato Lp denoterà la pressione in T, e il lato LP la pressione in S. Pertanto preso il segmento SI $=$ LP; ed il segmento T i $=$ Lp, guidate le verticali QI, Tg, e le orizzontali SQ; Tt, e compiti i parallelogrammi Qs, gt; le pressioni verticali sofferte dai piani saranno espresse dalle linee QI, Tg, e le orizzontali da SQ, Tt. Sia l'angolo ABO $= m$; aBo $= q$; g il peso della verga; p, π le pressioni normali ai piani AB, aB, avremo ang. aBA $= 180^\circ - q - m$, cioè la somma dei due angoli q, m sarà il supplemento di aBA; onde *sen.* ABa $=$ *sen.* $(q + m)$. E siccome gli angoli LSB, LTB sono retti; l'angolo SLT sarà pur esso supplemento dell'angolo ABa come opposto al medesimo nel quadrilatero LTBS. E parimente l'angolo SIQ $=$ GLP $= m$, e l'angolo iTg $=$ pLG $= q$ per esser simili i triangoli ABO, IQS, LPG, e i triangoli aBo, giT; pLG. Ora abbiamo trovato sopra (629)

$p = \frac{g\, sen.\, q}{sen.(m + q)} =$ IS, $\pi = \frac{g\, sen.\, m}{sen.\,(m + q)} =$ Ti. Quindi colle regole della risoluzione dei triangoli rettangoli troveremo i seguenti valori delle pressioni verticali, e orizzontali in S, e in T

$IQ = \frac{g\, sen.\, q.\, cos.\, m}{sen.\,(m + q)}$; $SQ = \frac{g\, sen.\, q.\, sen.\, m}{sen.\,(m + q)}$; e parimente $gT = \frac{g\, sen.\, m\, cos.\, q}{sen.\,(m + q)}$; $Tt = ig = \frac{g\, sen.\, m.\, sen.\, q}{sen.\,(m + q)}$.

* 637. Apparisce da queste espressioni, che le due pressioni orizzontali SQ, Tt sono eguali, e che essendo $sen.\, q\, cos.\, m + sen.\, m\, cos.\, q = sen.\,(m + q)$, la somma delle due verticali QI, Tg è come debbe essere $= g$.

* 638. Molte utili conseguenze naturalmente derivano da queste dottrine. Noi ne accenneremo di passaggio alcune delle più importanti. Ma per poterle dedurre con chiarezza, e facilità maggiore; si supponga, che il corpo ST si conformi in guisa da combaciare esattamente co' due piani inclinati, prenda cioè la figura d'un prisma triangolare. Esso verrà così a costituire la macchina BAaKD, conosciu-

ta sotto il nome di *Cuneo*, o *Zeppa*, o *Bietta* (*Fig.* 41): Dicesi *testa*, o dorso del cuneo il piano AL rappresentato in profilo dalla linea Aa; *lati* i piani laterali rappresentati pure in profilo dalle linee AB, aB; *facce* il triangolo ABa, e l'altro opposto; finalmente la normale BZ *altezza* del cuneo. Questa macchina è destinata per ordinario a separare le parti d' un qualche corpo insinuandosi tra le medesime per l'azione del suo proprio peso, o per la combinazione di esso, e di un'altra forza applicatale sul dorso. Perciò la resistenza, che se le presenta ordinariamente da vincere è la coesione; e l'azione, con cui la vince, è la pressione, che i suoi lati esercitano sulle parti, che vanno inclinandosi per separarsi. Laonde nel caso d'equilibrio; 1.° le pressioni d'ambi i lati saranno non solo eguali respettivamente alle resultanti delle coesioni delle parti corrispondenti, ma dovranno anche agire nella medesima direzione in sensi opposti; 2.° sarà perciò indifferente di considerare la relazione, che hanno colla forza, che agisce sul cuneo le resistenze, o le pressioni; onde 3.° tutto ciò, che abbiam detto delle pressioni di un corpo situato tra due piani inclinati (536) si adatterà alle azioni del cuneo, e alle resistenze, che vincono, solchè in luogo di g si sostituisca F, con cui s'esprima la risultante del peso del cuneo, e della forza normalmente applicata al suo dorso. Dunque

* 639. Supponendo il dorso del cuneo parallelo alla base Oo del corpo, entro cui s'insinua, e ritenendo le denominazioni del num.° 636 avremo $F : p : \pi :: sen.\ aBA : sen.\ q : sen.\ m :: sen.\ (m + q) : sen.\ BaA : sen.\ BAa :: Aa : AB : aB$; $F : p + \pi :: Aa : AB + aB$; e facendo $p + \pi$ somma delle pressioni, o delle resistenze eguale ad R, avremo $F : R :: aA : AB + aB$; $F = \frac{R \cdot aA}{AB + aB}$. Dunque la forza normalmente impressa al dorso del cuneo sta alla somma delle resistenze, che i lati del cuneo debbono vincere, come il dorso del cuneo alla somma dei suoi lati, o sia la forza necessaria all'equilibrio nel cuneo è eguale al prodotto della resistenza nel dorso del cuneo diviso per la somma dei lati. Quindi

* 640. 1.° Quanto sarà minore il dorso, e conseguente-

mente più acuto il taglio del cuneo, cioè quanto diminuisce l' angolo formato dai lati, tanto minor forza bisognerà per vincere la stessa resistenza. Perciò quelli strumenti, che si riferiscono al cuneo, come i coltelli, i rasoi, le scuri, gli scalpelli, le vanghe, ec. quanto più son sottili, tanto più sono attivi, cioè sono tanto più taglienti; perciò taglienti al sommo sono i cunei composti di due superficie curve nel medesimo senso, come i rostri degli uccelli di rapina, e le zanne degli animali feroci, perchè in questo caso l' angolo diventa quasi infinitesimo.

* 641. Se il cuneo sia isoscele, cioè se AB = aB, sarà $F = \frac{R.\,Aa}{2AB}$; $F : R :: \frac{1}{2}\,Aa : AB$, $R = \frac{F.\,AB}{\frac{1}{2}\,Aa}$; $\frac{1}{2}\,R = p = \pi = \frac{F.\,AB}{Na}$; e quindi $\pi : F :: AB : aA$; cioè se il cuneo è isoscele, 1.° *La forza normalmemte impressa sul dorso sta alla somma delle resistenze, come il semidorso a uno dei lati*; 2.° *la resistenza opposta a un lato sta alla forza, come un lato al dorso*.

* 642. II. Generalmente parlando, le pressioni p, π del cuneo, come quelle della verga ST (636) si risolvono respettivamente in due, una verticale, l' altra orizzontale, la prima delle quali non fa, che accrescere la pressione del corpo, cui è applicato il cuneo contro il suo sostegno, l' altra tende a rovesciare quelle parti del corpo, su cui ella si esercita. I valori di queste pressioni sono dati dalle formule del n.° 636.

643. Tale press' a poco è la teorica matematica del cuneo. Non dee dissimularsi, che l' applicazione di essa alla pratica non è suscettibile di molta precisione. Poichè la diversa tenacità, e flessibilità dei corpi diversi produce una notabile diversità negli effetti della stessa forza applicata allo stesso cuneo; onde non possono questi determinarsi, che per mezzo di sperienze ripetute in ogni caso.

644. Qualunque sia per altro, ella è utilissima per molti oggetti, specialmente di Architettura, e segnatamente

I. Deduconsi da essa i rapporti, che debbono avere tra loro i pesi dei conj, o pezzi cuneiformi, di cui è composta

una volta a botte, perchè questi pezzi stiano in equilibrio, e formino conseguentemente un tutto immobile.

* 645. Il La spinta delle volte contro i *piè dritti*, o pilastri, che le sostengono, e la grossezza, e configurazione esterna da darsi loro, perchè possano sostenerle, si determinano colle stesse dottrine. Mostra l' esperienza, che la maggior parte delle volte, che rovinano, si fendono lateralmente all' altezza di circa 45° sopra l' orizzontale. Può dunque la parte media considerarsi come un cuneo sostenuto tra due piani inclinati formati dalle linee della rottura, e bisogna dare a' piè dritti una grossezza, e una esterna curvatura tale, che oppongano una resistenza bastante alle pressioni orizzontali, con cui esso tende a rovesciarli. Tutto questo può determinarsi colle dottrine stabilite: ma trattandosi di cosa, che interessa più l' Architettura pratica, che la Fisica, noi non ci tratterremo ulteriormente ad esaminarla, e i Curiosi troveranno nell' Architettura idraulica del Prony, nell' operetta del Bossut sopra l' equilibrio delle volte, e nel primo libro dalla egregia Meccanica del Signor Venturoli ciò, che può dirsi di più importante su tal soggetto.

Macchina Funiculare.

646. Dicesi *funiculare* quella macchina, in cui per sostener dei pesi, o per fare equilibrio a delle potenze non si adoprano, che funi unite insieme con uno, o più nodi fissi, o scorrevoli. La fune QAS (*Fig.* 42) stirata dalle due potenze Q, S, o fissata co' suoi estremi ai punti Q, S, e la fune PA, che infilata nell' anello A sostiene il peso P, costituiscono una macchina funiculare.

647. Ora tre forze P, Q, S situate in uno stesso piano agiscono sul nodo A. Perchè siano in equilibrio conviene, che una di esse, per es. P, sia eguale, e direttamente opposta alla risultante delle altre due (124, 164). Le forze Q, ed S agiscono (per fissar le idee) da A

verso Q, ed S; ed all' opposto la P da A verso P. Si rappresentino le due Q, S per i segmenti AN, AM delle respettive loro direzioni, e si compia il parallelogrammo ANRM. Per il caso d' equilibrio la diagonale AR rappresenterà una forza P contraria, ed eguale alla risultante di Q, e di S; e sarà un prolungamento della direzione di essa P. Potremo dunque supporre, che le forze Q, ed S, e la P siano applicate ai punti Q, S, ed R, in cui le respettive direzioni prolungate quanto occorre, intersechino una verga inflessibile, che sia tenuta in equilibrio intorno al punto R per le azioni opposte della risultante P, e delle componenti Q, ed S. Ora in questo concetto i momenti delle potenze Q, ed S riferiti al punto R debbono essere eguali, e contrarj (163, 557); e perciò abbassando da esso punto le normali RC, RB sulle direzioni di Q, e di S, avremo $S : Q$ :: RC : RB :: *sen.* RAQ : *sen.* RAS. Abbiamo inoltre (127) $S : Q : P$ :: *sen*. RAQ: *sen*. RAS: *sen*. SAQ. Ove dunque la macchina funiculare QAPS sia in equilibrio intorno ad R, si avrà questa analogia; ed ove nell' esposto concetto si abbia questa analogia, la macchina sarà in equilibrio.

Quindi

648. I. Se il nodo A sia mobile, siccome non si può aver equilibrio, finchè non si sono ridotti eguali i rapporti del peso P colle potenze Q, ed S; cioè finchè non si abbia P : *sen* RAS $=$ P : *sen.* RAQ, ovvero P : RB $=$ P : RC; RB $=$ RC; così per l' equilibrio in tal caso dovrà esser *ang.* RAS $=$ *ang.* RAQ; vale a dire, le funi QA, AS dovranno disporsi in maniera, che l' angolo da esse formato sia diviso pel mezzo dalla direzione del peso.

649. II. La fune QAS formerà sempre un angolo

in A, qualunque siano, purchè finite, le forze Q, S, che la sostengono, e la stirano. Poichè fintanto che la ragione $Q + S : P$ è assegnabile, i due angoli SAR, QAR son finiti, e dev' essere in A una piegatura. È vero per altro, che al crescere delle forze Q, S crescono anche i detti angoli; e viceversa al crescer degli angoli debbon crescere le due forze, per modo che quando i detti angoli si riducessero eguali a due retti, le forze sarebbero infinitamente grandi. Di qui viene la gran difficoltà, che s' incontra nel tendere una fune in linea non verticale, ove il peso della fune servendo di resistenza fa sì, che ella si pieghi.

650. III. Se concorrano ad angolo le direzioni delle forze Q, S, che applicate agli estremi della fune QAS sostengono il peso P, sarà per l' equilibrio $P < Q + S$, essendo la somma dei due lati del triangolo RMA, che rappresentano le forze Q, S, maggiore del terzo lato, da cui è rappresentata la forza P. Ma se siano parallele, sarà $P = Q + S$ (142). Perciò la disposizione più vantaggiosa, che possa darsi a due funi per fare equilibrio a una resistenza, è di render la direzione di quelle parallela alla direzione di questa.

651. IV. Quando le funi sono fissate nei punti Q, S, le pressioni sofferte da questi punti sono come *sen.* SAR : *sen.* QAR.

652. V. Le tensioni X, Δ, K delle funi AP, AQ, AS dovendo essere proporzionali alle potenze, che le stirano, avremo $X : \Delta : K$ :: *sen.* QAS : *sen.* SAR : *sen.* QAR :: *sen.* QAS : *sen.* SAP : *sen.* QAP, avendo egual seno gli angoli, e i loro supplementi. Quindi

653. 1.° Se una fune è attaccata colle sue estremità a due punti fissi Q, S; e se l' angolo QAS è molto ottuso, una piccola forza P produrrà delle tensioni as-

sai forti nelle due parti QA, SA, perchè in tal caso sarà piccolo il seno dell'angolo QAS, e assai notabili i seni degli altri due angoli.

* 654. 2.° Sia in equilibrio una macchina funiculare ABCE (*Fig.* 43) attaccata ai punti fissi A, E, e guarnita di un numero qualunque di nodi B, C, D, di cui ciascuno unisce tre funi; e le funi BP, CQ, DS siano tirate dalle potenze *P*, *Q*, *S* situate nel piano stesso colla fune ABCDE. Dette *A*, *K*, *H*, *E* le tensioni delle funi BA, BC, CD, DE, si avranno le seguenti serie di proporzioni

K : *A* : *P* :: *sen.* ABP : *sen.* CBP : *sen.* ABC;
K : *H* : Q :: *sen.* DCQ : *sen.* BCQ : *sen.* BCD;
H : *E* : *S* :: *sen.* EDS : *sen.* CDS : *sen.* CDE.

E siccome vi è tra una serie, e l'altra una quantità comune, possono facilmente paragonarsi due qualunque delle forze proposte. Per es. se voglia paragonarsi *A* con *H*, prenderemo *A* : *K* :: *sen.* CBP : *sen.* ABP; e *K* : *H* :: *sen.* DCQ : *sen.* BCQ, e moltiplicando un' analogia per l' altra, si avrà *A* : *H* :: *sen.* CBP $\times$ *sen.* DCQ : *sen.* ABP $\times$ *sen.* BCQ.

* 655. 3.° Dopo ciò ai punti A, B d' una fune QABR (*Fig.* 44) appesa per i suoi estremi in Q, ed R siano applicate due potenze parallele *O*, *S*, che le facciano fare respettivamente gli angoli QAB, RBA. Se nel punto N, in cui si riuniscono le direzioni prolungate delle porzioni QA, BR, considerando QNR come una fune, se le applichi la potenza $P = O + S$ colla direzione NF parallela alle direzioni di *O*, *S*, ed esse siano tolte; si avrà equilibrio tra la potenza, e le tensioni dei segmenti QA, RB; talchè non se ne cangeranno le direzioni. In fatti dette *t*, *k*, *x* le tensioni di QA, AB, BR, abbiamo per il numero precedente O : *k* :: *sen.* QAB : *sen.* QAC, oppure (siccome BAN è supplemento dell' angolo QAB, e l'angolo QAC = OAN = ANF) O : *k* : *sen.* BAN : *sen.* ANF; e parimente per la stessa ragione *S* : *k* :: *sen.* RBA : *sen.* RBG :: *sen.* ABN : *sen.* BNF. Dicendo *a* l'angolo BAN, *b* l' angolo ANF, *c* l' angolo ABN, *d* l' angolo BNF, *e* l' ang. ANB,

sarà $O=\frac{k\ sen.\ a}{sen.\ b}$; $S=\frac{k\ sen.\ c}{sen.\ d}$; onde

$$O+S=k\left(\frac{sen.\ a\ sen.\ d+sen.\ c\ sen.\ b}{sen.\ b\ sen.\ d}\right).$$

Che se sopra il segmento AB della fune si conduca la normale NV, avremo $sen.\ a=cos.$ ANV, che diremo $cos.\ g$; e $sen.\ c=cos.$ BNV, che diremo $cos.\ f$. Onde dicendo h l'angolo FNV, avremo

$$O+S=k\frac{(sen.\ d\ cos.\ g+sen.\ b\ cos.\ f)}{sen.\ b\ sen.\ d}=$$

$$k\frac{(sen.\ d\ cos.\ [b+h]+sen.\ b\ cos.\ [d-h])}{sen.\ b\ sen.\ d}=$$

$k\frac{cos.\ h\ sen.\ (b+d)}{sen.\ b\ sen.\ d}=k\frac{cos.\ h\ sen.\ e}{sen.\ b\ sen.\ d}$, sostituendo i valori dei coseni della somma, e della differenza degli angoli b, h, e riducendo.

Ora abbiamo $t:k::sen.$ CAB $(=sen.\ m):sen.$ CAQ $(=sen.\ n)$; e $x:k::sen.$ GBA $(=sen.\ r)$: $sen.$ GBR $(=sen.\ z)$; onde $t=\frac{k\ sen.\ m}{sen.\ n}$; $x=\frac{k\ sen.\ r}{sen.\ z}$.

Dunque $O+S:t:x::\frac{cos.\ h\ sen.\ e}{sen.\ b\ sen.\ d}:\frac{sen.\ m}{sen.\ n}:\frac{sen.\ r}{sen.\ z}::$ $\frac{cos.\ h\ sen.\ e}{sen.\ b\ sen.\ d}:\frac{sen.\ m\ sen.\ z}{sen.\ n\ sen.\ z}:\frac{sen.\ r\ sen.\ n}{sen.\ z\ sen.\ n}$. Ma $cos.\ h=$ $sen.$ VFN $=sen.\ m=sen.\ r$; e $sen.\ b=sen.\ n$; $sen.\ d=$ $sen.\ z$. Dunque $O+S:t:x::sen.\ e:sen.\ d:sen.\ b$. Ma questa è l'analogia necessaria per l'equilibrio (647). Dunque se sia $P=O+S$, si avrà equilibrio, e non varieranno le posizioni dei due segmenti GA, RB della fune.

* 656. Che se non due sole, ma quante si vogliono potenze parallele O, V, S siano appese a varj punti della fune QBR (*Fig.* 45), e quindi prolungati i segmenti QA, RB finchè s'incontrino in N'; considerando QN'R come una fune, tolgansi le potenze O, V, S, e si applichi all'angolo N' in loro vece una forza Π eguale alla loro somma in direzione parallela alle loro direzioni, resterà sempre l'equilibrio tra questa forza, e le tensioni dei segmenti QA, RB, che conserveranno le stesse direzioni. Poichè, se fra ogni due for-

-ze S, V, protratti in M i due segmenti RB, AC della fune, s'intenda applicata all'angolo M in vece di *S*, *V* una forza π' eguale alla lor somma, parallela alle loro direzioni, e parte aliquota di Π; converrà a queste tre forze il discorso dell'articolo precedente: e se tra π', e un'altra forza se ne intenda applicata una terza π'' loro parallela, ed eguale alla lor somma, e parte aliquota essa pure di Π, converrà a questa ancora lo stesso discorso; e così progredendo, finchè tutte le forze si siano considerate, e si abbia $\pi' + \pi''$ ec. $= \Pi$, avremo dimostrato, che applicando in N' la potenza Π eguale alla somma di tutte le forze, e loro parallela, si avrà l'equilibrio tra questa forza Π, e le tensioni dei segmenti QA, RB.

* 657. Per tanto se si supponga infinito il numero delle potenze applicate così alla fune, e infinitesime le distanze fra loro, è chiaro, che la fune riducendosi all'equilibrio si dee conformare in una curva. Questa è quella curva, che dai Meccanici è detta *Catenaria*.

658. Dunque nella curva catenaria

1.° Prolungati gli elementi estremi della curva, per es. i segmenti QA, RB, che è quanto dire tirate le tangenti ai punti Q, R, e continuate finchè s'incontrino, la risultante di quelle potenze, che tendono tutti gli elementi passa per l'angolo formato dalle tangenti (656).

659. 2.° Le direzioni delle tensioni degli elementi QA, RB sono le tangenti loro respettive, onde se sia una catenaria la curva QSA (*Fig.* 46) prolungando le tangenti m F in *Z*, AF in T; ed esprimendo colla linea DP la direzione, e col segmento FP la quantità della risultante delle potenze, per cui si forma la curva, compito il parallelogrammo TFZP, la linea FT denoterà la tensione della particella Aa, o la pressione del punto A nel senso della tangente AF, che è la direzione della potenza stirante la particella Aa, o premente il punto A.

660. 3.° La fune QA stirata da una infinità di potenze, o pesi π, π', ec. riducendosi all'equilibrio abbia presa la figura di una curva. La pressione, che soffre uno dei punti, cui è attaccata l'estremità della fune, per es. A, sarà costante, o la curva sia continuata fino in Q, o s'interrom-

pa in un qualunque punto H, cui s'intenda d'improvviso attaccato il segmento HX intermedio a due pesi stiranti π, π'. Poichè il segmento HX risente dal punto H quella stessa reazione, che risentiva dal rimanente della curva, e quindi riman costante la tensione di esso segmento, e per conseguenza quella ancora di XA, e la pressione, che soffre il punto A.

661. Posto ciò, è ben facile di conoscere la natura della curva, che formerà una fune QR (*Fig.* 46) fissata nei punti Q, R, e abbandonata a se stessa riducendosi all'equilibrio, nella supposizione, che gli elementi di essa abbiano dei pesi espressi per una qualche funzione φ della loro lunghezza determinata però da una legge costante.

Al punto infimo A delle curva QAR verticale conducasi la tangente AF, si guidi da A la normale AKk, e tirinsi perpendicolari sulla medesima infinitamente vicine tra loro le ordinate MK, mk. Si alzi la verticale infinitesima MN, e prolungato l'elemento Mm della curva incontri in F la tangente AF. Per questo punto F guidando la verticale PFD, sarà essa la direzione della risultante delle potenze, che tendono l'arco QA (658), o del peso totale di questo arco. E se con la porzione FP si esprima questo peso, e si costruisca il parallelogrammo FZPT, la retta FT indicherà la pressione, che soffre il punto A secondo AF (659), pressione costante, qualunque sia la lunghezza dell'arco Am (660). Dicasi B questa pressione; sia l'arco $Am = s$; onde $Mm = ds$; $MK = y$, $Nm = dy$, $AK = x$, $Kk = dx$. Sarà il peso dell'elemento $Mm = \varphi ds$, e il peso dell'arco $Am = \int \varphi\, ds$. Essendo pertanto simili i triangoli FTP, FGM, NmM, avremo $\int\varphi ds : B$ :: FP : FT :: FG : GM :: MN : Nm :: $dx : dy$; e quindi $dx = \frac{dy \int \varphi ds}{B}$ equazione della curva cercata.

662. Questa equazione generale della curva, in cui si dispone una fune, o una catena flessibilissima, prende varie forme, secondo le varie leggi dei pesi, da cui si suppongon gravati gli elementi di essa fune, o catena. Gli Studiosi troveranno diffusamente esposto ciò, che appartiene a tal curva nell'Opere di Gio. Bernoulli (*Essai sur la manoeu-*

vre des vaisseaux), di Daniele suo figlio (*Mém. de l' Ac. de Pétersb. T.* 3) ; nel cap. 21 della Mec. del Signor Venturoli , e nel lib. 1 della Mec. del Poisson . Noi frattanto osserveremo , che questa curva non si forma , se non quando sono ridotti all' equilibrio gli elementi materiali , da cui ella risulta . Ora siccome questi elementi son gravi , e naturalmente tendono a basso , così perchè riducansi all' equilibrio conviene , che da forze eguali , ed opposte siano spinti in alto . Dovendo pertanto essere eguali , ed opposte le forze , che agiscono su detti elementi di alto in basso , e di basso in alto , potremo indifferentemente considerar la curvatura come volta in alto , o in basso ; conseguentemente la stessa equazione converrà alla curva , sia ella voltata in un senso , o nell' altro .

663. Sia pertanto voltata in alto la curva della trovata equazione . È chiaro , che ella debbe essere rigida , e pesante ; posare su due piani , o punti immobili Q , R ; e risultare da diversi segmenti affetti da forze tra di loro parallele , che gli tengano in equilibrio . Ma tali sono i caratteri di quelle curve , che nell' Architettura sogliono indicarsi col nome di *curve d' equilibrio* , e si formano nella costruzione dei ponti , volte , ec. Dunque queste curve d' equilibrio non sono , che catenarie rovesciate ; onde ciò , che conviene alle catenarie conviene ancora alle curve d' equilibrio .

664. Molte cose potrebbero dirsi intorno a queste curve , ma noi non crediamo doverci trattenere su di un articolo , che appartiene propriamente all' Architettura : ed avvertiamo gli Studiosi , che troveranno da appagare la loro curiosità nella seconda parte della Dinamica del P. Mariano Fontana .

CAPITOLO XXIII.

Dell' attrito, della rigidezza delle funi, e delle macchine in moto.

665. Allorchè dall' astratta considerazione delle macchine si passa alla concreta, e se ne prendono in esame gli effetti, accade ben di rado, e forse non mai, che la pratica corrisponda esattamente alla teorica. Suppone la teorica le macchine composte di corpi perfettamente duri, perfettamente lisci, liberi perfettamente da ogni attrazione: laddove la pratica gli trova flessibili, porosi, scabri, e molto soggetti non men alle speciali, che alla universale attrazione.

Piccolo, e facilmente corrigibile è il divario prodotto dalla sola flessibilità; ma molto notabile è quello, che nasce dagli effetti della porosità, della scabrosità, e dell' attrazione. L' attrazione universale, o sia la gravità fa, che i corpi sovrapposti si premano; per lo che le prominenze, o punte degli uni s' insinuano dentro le cavità, o pori degli altri; e tanto più profondamente vi s' insinuano, quanto più grande è la pressione, e più lungo il tempo, in cui si esercita (fino però che non siano arrivate a quel massimo di profondità, che non è possibile di oltrepassare per qualunque aumento di pressione, o di tempo). Nasce da ciò, 1.° che questi corpi non possono progredire gli uni su gli altri, senza che tali punte si rompano, o si pieghino, se essi strisciano; si sollevino, e si distrighino, se essi rotano; 2.° che accrescendosi i contatti reciproci, si accresce l' effetto delle attrazioni speciali, e nascono perciò delle adesioni scambievoli.

Sia pertanto, che queste punte debbano distrigarsi, sia, che debbano rompersi, o piegarsi, si produce necessariamente un ritardo al moto, maggiore nel secondo, minore nel primo caso; ma sempre notabile, specialmente se notabili son le adesioni, e principalmente il peso del corpo premente. Da tutto questo risulta ciò, che i Meccanici chiamano *Attrito*. Ora se l' attrito è sommamente giovevole agli animali, che gli debbono la facilità, con cui possono imprimersi il moto, non meno che la sicurezza, e la forza, con cui si appoggiano sul suolo movendosi; se frequentemente si trova utile per molti importanti oggetti alle Arti, e alla Meccanica, che riconoscono dal medesimo le lime, le raspe, le seghe, i modi di pulire, e lisciare i corpi, ec.; egli è certo, che riesce non men frequentemente dannoso; o logorando le macchine, o consumando le forze, che vi sono applicate, o distruggendo il moto, che ne è prodotto; o finalmente inducendo in gravi, e dispendiosi errori quelli Artisti, che o non sanno, o non possono valutarne bastantemente gli effetti indeterminati al sommo, e non soggetti ad un calcolo generale, e rigoroso.

666. Non han trascurato i Meccanici di rintracciare i mezzi più opportuni per togliere, o almeno diminuire quanto è possibile sì gravi danni: e il ragionamento ha loro fatto sperare di riuscirvi accoppiando nelle macchine corpi di natura diversa, che non abbiano tra loro speciale attrazione; lisciandoli più che si può; spalmandoli ripetutamente con materie crasse, o untuose di varia natura, secondo la varia specie dei solidi, che debbono confricarsi; fra le quali materie è da preferirsi la sottilissima polvere di steatite impastata con olio, o sego; o quella pur sottilissima di carburo

di ferro o piombaggine mescolata con poche goccie d' alcool (*V. Bib. Un. T.*39 *p.* 230); e diminuendone i contatti, quanto le circostanze permettono. Ma per quanto tali diligenze producano sempre un buon effetto; pure siccome non è possibile di pulire perfettamente un corpo, e di riempirne perfettamente i vuoti; e siccome probabilmente concorrono alla produzione di questo incomodo effetto oltre le accennate cagioni molte altre non ben conosciute, quali sono la natura speciale de' componenti dei varj corpi, la lor figura, il grado della lor durezza, forse l' ampiezza delle superficie contigue, la lunghezza del tempo, in' cui si esercita la pressione d' una superficie sull' altra, la direzione del moto, la velocità, lo stato diverso dell' atmosfera, ec., così nè co' metodi indicati, nè con altri è stato fin qui possibile, e forse non lo sarà in appresso di distruggerlo totalmente. Non abbiam dunque altro mezzo per impedire gli sconcerti dell' attrito, che tentare di rintracciarne col calcolo la quantità in ogni macchina, e considerarla come una parte di resistenza. Ma questo calcolo stesso è sommamente difficile, e dipendendo da tanti elementi incerti, e variabili, non può mai portare ad un risultato sicuro, e generale. Perciò tosto che sia fissata la ragione, che in una macchina dee aver la forza colla resistenza, bisogna ricercare con un esperimento immediato, ed un successivo calcolo particolare quanta forza debba aggiungersi per vincer l' attrito a quella prescritta dalla teorica per equilibrare la resistenza. Accennerò brevemente come si sogliono istituire questi sperimenti, e questi calcoli.

667. I Meccanici distinguono tre specie d' attrito, o piuttosto consideran l' attrito in tre diverse circostanze.

1.° Quando un corpo comunque striscia : 2.° quando un corpo rotondeggiante ruzzola sopra un piano: 3.° quando una superficie convessa gira in una concava, o reciprocamente, come per es. una rota, o una puleggia sul loro asse.

Ora diverso è il metodo, con cui si fanno gli sperimenti, secondo che diversa è la specie dell' attrito, che si vuol calcolare. Tutti per altro soglion dirigersi a determinare il rapporto dell' attrito alla pressione. Noi chiameremo n questo rapporto; talchè se la pressione si esprima per Q, l' attrito, che ella produce sarà espresso per nQ.

668. Ecco pertanto due de' più esatti metodi per misurare la prima specie d' attrito.

I. Sopra una lunga tavola orizzontale di una data specie di legno è collocata una zattera fatta di una parimente data specie di legno, che può gravarsi di varj pesi per aver varie pressioni. Una flessibilissima funicella attaccata alla zattera passando sopra di una puleggia mobilissima sostiene un piatto, in cui si pongono successivamente dei noti pesi, finchè questi giungano a smuover la zattera. Il peso necessario a smuoverla, ne misura l' attrito; e il rapporto di questo peso alla pressione dà il valore del coefficiente n pe' corpi, su' quali si sperimenta. Possono poi sottoporsi allo sperimento corpi di varie qualità, e superficie di varia ampiezza, fissando o sulla tavola, o nel fondo della zattera delle lamine di varia natura, e grandezza.

Ma con tal metodo si misura soltanto l' attrito, che si oppone al distacco dei corpi, o al principio del moto. Per calcolare quello, che difficulta il progresso del moto di una superficie sull'altra si usa lo stesso apparato; solo si fa, che il piatto, ove pongonsi i pesi, scenda per

lungo tratto, onde per lungo tratto si tiri dietro la zattera ; e misurando il tempo , che essa spende a percorrere successivamente dei noti spazj , e segnatamente le due metà della tavola , si scoprono le variazioni, che nel moto della zattera , e dei pesi sono prodotte dall' attrito . Quindi primieramente si deduce la legge , cui esso attrito va sottoposto , Così talvolta si è trovato, che il moto si manteneva uniformemente accelerato ; e l' attrito appariva costante , e indipendente dalla celerità . In altri sperimenti si è trovato , che il moto si mostrava sensibilmente uniforme ; dal che si comprese , che l' attrito andava crescendo al crescere della velocità . Deducendo poi dal rapporto degli spazj co' tempi le diminuzioni della forza motrice nei diversi casi (112), si conosce la quantità dell' attrito , che le produce , e loro è perciò proporzionale .

II. Sia un corpo situato sopra un piano orizzontale . Finchè il piano resta in questa situazione il corpo dee rimaner immobile . Ma tosto , che inclinandosi all' orizzonte , sia giunto a formare l' angolo m di elevazione anche sommamente piccolo , qualora non esistesse l' attrito , dovrebbe il corpo immediatamente discendere trasportato dalla gravità relativa (268) . Dunque se non si muove , l' attrito vince la gravità relativa ; l' eguaglia , se è in equilibrio , o in procinto di muoversi . Ora la gravità relativa è $= g\ sen.\ m$; e $g\ cos.\ m$ la pressione (271) . Sarà dunque l' attrito $= n\ g\ cos.\ m$. Questo facendo equilibrio alla gravità relativa , si avrà $ng\ cos.\ m = g\ sen.\ m$; $n = tang.\ m$.

Molte esperienze sono state fatte in grande sull' attrito con questi , ed altri metodi specialmente dal Ximenes (*Teorìa, e Pratica delle resistenze dei solidi*, ec.),

e dal Coulomb (*Mém. présentées à l'Acad. T. X*). Si è dedotto da queste,

1.° Che in pari circostanze l'attrito è proporzionale alla pressione, se si eccettui qualche non valutabile anomalia pel caso, che la pressione si riduca molto grande.

2.° L'attrito varia secondo la qualità delle superficie. Ma qualunque sia l'ampiezza della superficie, l'attrito nel distacco tra i legni nuovi, benchè piallati, è circa $\frac{1}{2}$ della pressione, cioè si ha $n = \frac{1}{2}$, si ha $n = \frac{1}{3}$ circa pe' legni logori; $n = \frac{1}{4}$ fra i metalli, $n = \frac{1}{5}$ fra i legni, ed i metalli. Generalmente quando le superficie per la lunga confricazione son molto logore l'attrito si diminuisce notabilmente.

3.° È necessario, che il contatto duri un certo tempo, perchè l'attrito giunga al massimo nei diversi corpi. Brevissimo questo tempo, e impercettibile pei metalli soprapposti ai metalli, si riduce a un minuto, o due pei legni soprapposti ai legni, e si estende a qualche giorno pei legni soprapposti ai metalli.

4.° Le spalmature con materie untuose diminuiscon l'attrito tanto più, quanto l'unto è più consistente; e prolungano il tempo necessario, perchè l'attrito riducasi al suo valore massimo, e costante.

5.° L'attrito de' corpi in moto è minor di quello, che ha luogo nel primo distacco, o nel passaggio dalla quiete al moto; ma questa differenza non è eguale per tutti i corpi. Nei legni per l'attrito nel moto si ha $n = \frac{1}{8}$; nei legni co' metalli $n = \frac{1}{12}$, se il moto sia lento, e continuo. Questo attrito tra legni, e legni, e tra metalli, e metalli è costante, ma tra legni, e metalli varia al variare della velocità.

669. Per trovare il valore di n relativo all'attrito

della seconda specie, si può usare il secondo tra i metodi esposti, riducendo sferico il corpo da porsi in esperimento, e si può, se più ne piaccia, operare nella seguente maniera.

Sopra due tavolette parallele di eguale altezza drizzate a piccola distanza tra loro si colloca normalmente alla loro lunghezza un cilindro di quella materia, che vuolsi sottoporre all' esame. Su questo cilindro di mezzo alle due tavolette si accavalla un filo, alle cui estremità si attaccano due pesi, che mantenendosi in equilibrio producano una conosciuta pressione. Quindi si aumenta uno di questi pesi tanto, quanto è necessario per mettere, e mantener il cilindro in un moto lento, e continuo. L' aumento di peso per ciò necessario misura l' attrito del cilindro. Si è notato, che l' attrito di questa specie è piccolissimo in confronto di quello della prima; varia a circostanze pari in ragione inversa del diametro del cilindro; ed è ben poco diminuito dall' unto.

670. Per determinar l' attrito della terza specie si riduce all' equilibrio con una pressione una puleggia a centro fisso fatta della sostanza, su cui si vuole sperimentare. Il peso necessario ad eccitare, e mantenere il moto misura l' attrito; e nel seguente numero vedremo, come dee calcolarsi l' effetto in tal caso.

Risulta dalle sperienze così eseguite, che 1.° questo attrito è minore di quello della prima specie; e ciò probabilmente, perchè le superficie, che si confricano, essendo sempre le medesime, le loro punte prominenti piegate una volta come non debbono più piegarsi, così presentano minor ostacolo al proseguimento del moto. 2.° Se l' asse sia di ferro, e la puleggia di rame,

si ha $n = \frac{1}{7}$; se sono di legno la puleggia , e l' asse , si ha $n = \frac{1}{12}$.

Si consulteranno le due citate Opere per aver una notizia più estesa dei resultati di tali esperienze. Quelli, che abbiamo riferiti bastano pel nostro oggetto .

671. Ciò posto , convien osservare, che per cagione degli attriti si trova in pratica lo *stato d' equilibrio* delle macchine ben diverso dal loro *stato prossimo al moto.* Non basta aumentar la potenza d' una minima quantità per metter in moto le macchine equilibrate ; ma bisogna aumentarla d' una quantità sufficiente a vincere tutti gli attriti , e le così dette forze passive . Vediamo pertanto come si possa determinare questa quantità nelle singole macchine .

Nel vette l' attrito non è molto considerabile , se non quando è ridotto a bilancia ; onde a questo solo caso limiteremo la nostra ricerca relativamente a tal macchina .

Il vette AB (*Fig.* 14) rappresenti una bilancia traversata perpendicolarmente dall' asse cilindrico hfP , che gira su due appoggi , uno dei quali è il punto d . Dicasi a il braccio Ad = Bd ; p il peso , o la potenza posta nel piatto D , c il contrappeso , o la resistenza nel piatto E . Facendo astrazione dall' attrito , abbiamo $p = c$; e la pressione sugli appoggi $= p + c = 2p$; ma se l' attrito aumenti la resistenza in modo , che bisogni aggiungere alla potenza una quantità q per ridurla fisicamente in equilibrio , la pressione diverrà $2p + q$. Posta pertanto la ragione dell' attrito alla pressione $n : 1 = n$, sarà $n (2p + q)$ la forza d' attrito . Questa agisce secondo f g tangente al cilindro h P f , cioè alla distanza h p $= r$ dal centro d dei momenti , mentre la forza q , che la tiene in equilibrio , a-

gisce alla distanza a da questo centro. Dovendo dunque per l' equilibrio essere eguali i momenti di queste forze riferiti allo stesso centro, avremo $n\ (2p + q)\ r = q.\ a$, onde $q = \frac{2npr}{a - nr}$. Talchè se $p = c = 200$ libbre, $r = \frac{a}{100}$; $\frac{r}{a} = \frac{1}{100}$; $n = \frac{1}{3}$ della pressione, sarà $q\ \frac{400}{499}$, e perciò $p = 200 + \frac{4}{5}$ libbre circa; onde per vincere in tal caso l' attrito bisogna aumentar la potenza di $\frac{4}{5}$ di libbra.

672. Supponendo, che col braccio Ad, o Bd della bilancia AB sia descritta una puleggia di centro fisso, ciò, che abbiamo detto dell' attrito nella bilancia potrà esattamente applicarsi alla puleggia fissa. Onde se ad una puleggia, che abbia a per raggio proprio, ed r per raggio dell' asse, siano applicate la potenza p, e la resistenza c, sarà necessario pell' equilibrio fisico, che a c, o a p si aggiunga la quantità $q = \frac{2pnr}{a - nr}$.

673. Con egual facilità può determinarsi la forza necessaria per l' equilibrio fisico nelle pulegge mobili. Le pulegge G, F, V abbiano eguali i raggi a, e gli assi r. Sia $R = p$ (*Fig.* 27). Nello stato d' equilibrio matematico le funi parallele Te, SF sono stirate ognuna da una forza $\frac{1}{2}\ p$ (604); le funi Lb, OV da una forza eguale alla metà di quella, che stira SF, cioè $\frac{1}{4}\ p$; e le funi Za, AQ da una forza eguale alla metà di quella, che stira OV, cioè $\frac{1}{8}\ p$; talchè la forza $P = f$ applicata all' ultima puleggia per eguagliare la tensione della fune AG deve essere espressa per $\frac{p}{2^3}$, se tre siano le pulegge (506). Ma come l' attrito fa aumentar le tensioni delle funi, così dee aumentarsi il valore di

f. Dette pertanto X, Y, Z le tensioni delle funi Tc, OV, AQ, siano x, y, z le quantità di tensione destinate a vincere l' attrito nelle tre pulegge C, E, V; e sia come sopra $n : 1$ la ragione dell' attrito alla pressione. Nella puleggia C la pressione sull' asse è $= p$; ed np l' attrito (nella cui espressione non facciamo entrare la forza x, perchè ella tende a sollevare la puleggia). Dovendo pertanto essere eguali i momenti dell' attrito np, e della forza x destinata a vincerlo riferiti al centro della puleggia, sarà $x \cdot a = np \cdot r$; $x = \frac{npr}{a}$. Perciò la tensione $X = \frac{1}{2} p + x = p \frac{a + 2nr}{2a}$. Parimente siccome la pressione della puleggia F sul suo asse è X, così ne sarà nX l' attrito; e si avrà $y = \frac{nXr}{a}$, e $Y = \frac{1}{2} X + y = \frac{X(a + 2nr)}{2a}$. Finalmente nella stessa maniera per la puleggia V si troverà $z = \frac{nYr}{a}$; onde $Z = \frac{1}{2} Y + z = \frac{Y(a + 2nr)}{2a}$. Fatto $\frac{a + 2nr}{2a} = q$, sarà $X = pq$; $Y = pq \cdot q = pq^2$; $Z = pq \cdot q^2 = pq^3$. E se fossero m le pulegge, la tensione dell' ultima fune sarebbe $pq^m = f$ forza necessaria per l' equilibrio fisico in un sistema di pulegge mobili eguali con funi parallele disposte come nella Figura 27.

Se sia $R = 800$ libbre, $\frac{r}{a} = \frac{1}{6}$; $n = \frac{1}{3}$ della pressione, onde $q = \frac{8}{15}$; $m = 3$; sarà $X = 426, 67$; $Y = 227, 55$; $Z = 121, 36$ circa, ed $f = 121$; mentre senza l' attrito sarebbe stata $= 100$. Nello stesso modo può facilmente valutarsi l' attrito anche in diversi sistemi di pulegge mobili. Si avverta, che se in questi

sistemi si trovasse una puleggia di rimando, dovrebbe calcolarsene l'attrito col metodo del numero superiore.

674. Prendendo ad esporre il modo, con cui può valutarsi l'attrito nell'argano supponiamo, 1.° che la potenza P (*Fig.* 30) applicata in H alla rota, e la resistenza R applicata in direzione verticale al cilindro in O non siano nello stesso piano normale al cilindro.

2.° Che tutto il carico dell'argano sia sostenuto da due porzioni E, F degli *occhietti*, che consideriamo come due punti d'appoggio.

Pertanto la potenza $P = \varphi$, e la resistenza $R = \pi$ s'intendano risolute in due potenze q, q', e in due resistenze p, p', che abbiano direzioni respettivamente parallele, e distanze dall'asse della rota, e del cilindro respettivamente eguali a quelle di P, e di R. Supponiamo applicate al punto E le forze p, q; e le p', q' al punto F. Le pressioni sofferte da questi due punti saranno le risultanti di p, q, e di p', q'. Laonde se tirate le verticali Ez, Fs, e parallele alla direzione HP della potenza le Eh, Fm, si rappresentino le forze p, q per le porzioni Eg, Eh delle loro direzioni; e p', q' per le porzioni Fi, Fm, compiti i parallelogrammi Ehtg, Fmli, le pressioni degli appoggi E, ed F saranno indicate dalle diagonali Et, Fl.

Siano ora le forze $Eh = q$, $Fm = q'$ risolute in due altre Ex, $Eu = xh$; Fy, $Fr = ym$, le prime orizzontali, le altre verticali; e tirinsi le orizzontali tz, ls. Avremo *triang.* $Exh = gzt$; *triang.* $Fym = isl$; e $xh = gz$; $ym = is$. Quindi la total pressione di E risulterà dalla pressione orizzontale Ex, e dalla verticale $Eg + gz = Ez$; e quella sofferta da F dalla orizzontale Fy, e dalla verticale $Fi + ym = Fs$.

Ciò posto, dicansi s, e c il seno, ed il coseno dell' angolo mFy = hEx fatto coll' orizzonte dalla direzione della potenza P. Sia Et $= E$; Ex $= e$; Ez $= e'$; Fl $= F$; Fy $= f$; Fs $= f'$. Avremo Ex $= e = qc$; Ez $= e' = p + qs$; Et $= E = \sqrt{(q^2c^2 + [p + qs]^2)}$ pressione sofferta dal sostegno E. Così pure troveremo Fy $= f = q'c$; Fs $= f' = p + q's$; Fl $= F = \sqrt{(q'^2c^2 + [p' + q's]^2)}$ pressione sofferta dal sostegno F.

Ma secondo ciò, che fu stabilito al n.° 568 ponendo EF $= a$, OF $= b$, OE $= \beta$, CF $= d$, CE$=\delta$, abbiamo $p = \frac{\pi b}{a}$; $p' = \frac{\pi\beta}{a}$; $q = \frac{\varphi d}{a}$; $q' = \frac{\varphi\delta}{a}$. Dunque sostituendo $E = \frac{\sqrt{(c^2\varphi^2d^2 + [\pi b + \varphi sd]^2)}}{a}$, ed

$$F = \frac{\sqrt{(c^2\varphi^2\delta^2 + [\pi\beta + \varphi s\delta]^2)}}{a}.$$

Queste sono le pressioni sofferte dai sostegni F, E, qualora non si consideri l' attrito. Ma se si consideri, come la potenza φ dovrà aumentarsi d' una quantità r destinata ad equilibrarlo, così le dette espressioni diverranno

$$E = \frac{\sqrt{([c(\varphi + r)d]^2 + [\pi b + s(\varphi + r)d]^2)}}{a};$$

$$F = \frac{\sqrt{([c(\varphi + r)\delta]^2 + [\pi\beta + s(\varphi + r)\delta]^2)}}{a}.$$

Ora queste due pressioni producono due attriti, che hanno per valor respettivo $n \times E$, $n \times F$, e per distanza dal centro dei momenti il raggio k dell' asse del cilindro, o dei pernj, mentre la potenza r destinata a superarli ha per distanza dal centro dei momenti il raggio K della rota; talchè dovendo il momento di r essere eguale alla somma dei momenti dei due attriti riferiti allo stesso centro, sarà $Kr = knE + knF$, on-

de $r = \frac{knE + knF}{K}$, equazione, da cui si ricava il valore di n sostituendo i valori già ritrovati di E, e di F. Questa formula per altro sarebbe assai intrigata per ridursi alla pratica. Ma siccome per ordinario il raggio dell' asse del cilindro è piccolissimo relativamente al raggio del cilindro, e a quello della rota; così la forza necessaria per vincer l' attrito debb' esser piccolissima in paragone di P, e di R; onde possono trascurarsi nei valori trovati sopra di E, e di F i termini, che contengono r senza notabile errore. Trascurati questi termini, si ha $r = \frac{kn}{K} \times$

$$\frac{\sqrt{(c^2\varphi^2d^2 + [\pi b + \varphi sd]^2)} + \sqrt{(c^2\varphi^2\delta^2 + [\pi\beta + s\varphi\delta]^2)}}{a}.$$

675. Ciò, che abbiam detto nei nn. 617, 624, ec. della pressione sul piano inclinato, e nel n.° 668 del modo di trovare per mezzo di questa macchina il valor di n ci dispensa dal parlarne presentemente.

676. Così pure non parleremo dell' attrito nell' altre macchine, che sono modificazioni, o applicazioni di quelle considerate. I metodi usati per queste possono facilmente adattarsi a tutte le altre.

677. Ma non men, che l' attrito contribuisce a produrre una discrepanza tra la teorica astratta, e la pratica nella dottrina delle macchine la rigidità delle funi; e non men difficilmente, che l' attrito è essa riducibile ad un calcolo rigoroso, e generale. Vogliasi per es. sollevare con una macchina un peso attaccato ad una fune, che debba per sollevarlo avvolgersi ad un cilindro. Se ella non è perfettamente flessibile, oltre che resiste a piegarsi, e perciò consuma una porzione della forza; rimane anche alcun poco discosta dalla

superficie del cilindro; e così allontanando il peso dall'asse di rotazione, ne fa crescere il momento in modo, che ci vuole una forza alquanto maggiore per sollevarlo. Diversi tentativi si son fatti dagli Sperimentatori per soggettare ad una regola gli effetti della rigidità delle funi; ma per la moltiplicità, e la varietà degli elementi, da cui essi dipendono; quali sono principalmente la diversa qualità, e tortura della canapa, il diverso stato dell'atmosfera, ec., non si è potuto ottenere quel successo, che si desiderava. Perciò volendo conoscere senza rischio d'errare la quantità precisa della forza necessaria per compensargli, conviene ricorrere in ogni caso particolare ad un particolare esperimento.

Posson vedersi nella sopra citata Memoria del Coulomb, e nella Meccanica del Bossut i metodi per istituire questi sperimenti, e per calcolarne i risultati. Per noi basterà di avvertire, che con replicate esperienze si è determinato, che una corda ha tanto maggior rigidità, 1.° quanto ne è maggiore la tensione; 2.° quanto è più grossa; 3.° e quanto è più piccolo il diametro del cilindro, attorno del quale debbe avvoltarsi. D'onde han dedotto i Meccanici, che *la rigidità d'una corda è in ragion composta della diretta di una potenza del suo raggio, che nelle nuove, e nelle impeciate ha per esponente* 1, 7, *e* 1, 4 *nelle molto usate, e del peso, che la tende; e dell'inversa del raggio del cilindro, a cui si avvolge.* E quindi rilevasi il rapporto della forza, che vuolsi impiegare per vincerla.

678. Da quello, che abbiam detto fin qui dell'attrito, e della rigidezza delle funi chiaramente apparisce la ragione della regola stabilita dai Meccanici, che

la forza bastante all' equilibrio in una macchina non produce per ordinario il moto, ove non si aumenti del terzo di se stessa; cosicchè se per l' equilibrio abbisogna una forza F, bisognerà per il moto una forza $= \frac{4}{3} F$.

Delle Macchine in moto.

679 Accresciuta pertanto quanto conviene la potenza, cominci la macchina a muoversi. E chiaro, che siccome e la resistenza, e tutte le forze passive si oppongono continuamente al moto prodotto dalla potenza; così bisogna, che l' azione della potenza sia continua, perchè sia continuo il moto della macchina. Dee dunque la potenza applicata alla macchina riguardarsi in generale come una forza acceleratrice. Ora se questa forza sia costante, e costante sia pure la resistenza; e l' una, e l' altra si muoveranno con moto uniformemente accelerato. Ma se la potenza sia variabile, e vada, come spesso suol accadere, successivamente infievolendosi; o se restando costante la potenza, varj la resistenza, l' accelerazione uniforme non ha più luogo, e il moto della macchina dee ridursi, ed effettivamente si riduce ben presto all' uniformità. Ne abbiamo altrove accennate le più ovvie cagioni, onde non ci tratterremo qui a ripeterle.

680. Poste poi queste cagioni, facilmente si scoprono col calcolo gli effetti, che debbono derivarne.

Il peso P applicato come potenza ad una macchina eccitando nella medesima una rotazione intorno a un punto, o ad una linea fissa, sollevi nel deprimersi la resistenza R. Siano a, b i raggi, o le distanze delle direzioni della potenza, e della resistenza dal centro, o asse di rotazione, e conseguentemente $a. P$, $b. R$ i respettivi loro momenti riferiti al detto centro, o asse. Dicansi φ, φ' le forze acceleratrici della potenza, e della resistenza. Sollevandosi R, mentre si abbassa P, i loro moti scambievolmente si modificano, e il momento della forza acceleratrice, che fa rotar la macchina

è $aP - bR$. Ora detta ω la celerità angolare del sistema composto dalla potenza, dalla resistenza, e dalla macchina, abbiamo (410) $\frac{d\omega}{dt}$ eguale al momento della forza acceleratrice diviso pel momento d'inerzia del sistema. Siccome poi le masse P, R ad ogni istante si muovono con quella velocità, con cui girano le estremità dei respettivi raggi a, b; così debbono intendersi concentrate nelle estremità di quei raggi; e i momenti d'inerzia ne sono (392) $a^2 . P$, $b^2 . R$; onde, detto S il momento d'inerzia della macchina, sarà $S + a^2 P + b^2 R$ il momento d'inerzia di tutto il sistema; e perciò $\frac{d\omega}{dt} = \frac{aP - bR}{S + a^2 P + b^2 R}$, che faremo $= M$. Dunque $\omega = \int Mdt$; e dette c, c' le celerità della potenza, e della resistenza, avremo (390) $c = a\omega = a \int Mdt$; $c' = b\omega = b \int Mdt$; e quindi (93) $\varphi = \frac{dc}{dt} = aM = a \times \frac{a . P - b . R}{S + a^2 P + b^2 R}$; $\varphi' = \frac{dc'}{dt} = bM = b \times \frac{aP - bR}{S + a^2 P + b^2 R}$. E poichè P, ed R son costanti, saranno costanti ancora φ, e φ'.

Che se in vece del peso costante P sia applicata alla macchina una forza variabile F, nella stessa maniera si troverà $\varphi' = b . \frac{aF - bR}{S + a^2 F + b^2 R}$; ma questo valore varierà al variare di F.

Quindi

681. 1.° Nel primo caso i moti della potenza, e della resistenza saranno uniformemente accelerati; non lo saranno nel secondo.

2.° Conosciuta la forza variabile φ', le note equazioni $\varphi' dt = dc$, $\varphi' ds = cdc$ (93) mostreranno gli aumenti della velocità, e tutti gli accidenti del moto.

3.° Se continuando il moto, F va scemando, o R va crescendo, φ scemerà; e il moto si anderà accostando all'uniformità.

4.° Ridotto che sia $a . F = b . R$, come si riduce $\varphi' = 0$; così, cessata ogni forza acceleratrice, il moto diverrà uniforme.

5.° In questo caso il momento della forza essendo eguale al momento della resistenza, è chiaro, che si distruggono scambievolmente i loro effetti, e la macchina non si muove, che per il moto preconcepito.

6.° La forza, che si richiede per mantenere uniforme il moto di una macchina è quella medesima, che bisogna per l' equilibrio.

682. Quando una macchina si move uniformemente sollevando un peso, se ne calcola l' effetto in un tempo $= 1$ pel prodotto del peso nella celerità, con cui è sollevato; come si misura l' effetto della forza pel prodotto di essa (539) nella velocità. Dunque

683. 1.° Se la macchina sia, per es. un argano, le velocità della potenza, e della resistenza c, c' essendo fra loro come gli spazj descritti in egual tempo, e perciò proporzionali alle respettive distanze A, a (611) dall' asse di rotazione, sarà $c : c^1 :: A : a$; e perciò l' equazione $aF = bR$ (681, 4.°) si convertirà in $Fc = Rc^1$. Ma Rc^1 è l' effetto della macchina, Fc quello della potenza. Dunque l' effetto della macchina è eguale all' effetto della potenza. E quindi si conferma, che le macchine non accrescono in modo alcuno l' effetto istantaneo della forza (555).

684. 2.° Aumentando la distanza, o il raggio A, e scemando il raggio a, minor forza sarà necessaria per muover la resistenza. Ma se un tal compenso fa, che minor forza basti a muovere un dato peso, fa altresì, che muovasi con altrettanto minor velocità; onde se per un lato accresce, diminuisce per l' altro l' effetto della macchina. Per avere il massimo effetto, cioè la massima celerità nel peso, o resistenza, che si muove, conviene, che i raggi della rota, e del cilindro abbiano tra loro un determinato rapporto, che facilmente si fissa nella seguente maniera.

Sia C la celerità, con cui si moverebbe la potenza, se non fosse in contrasto con altra forza; m ne sia la massa, talchè ella sia rappresentata dal prodotto mC. Sia m' la massa della resistenza. La potenza perde pel contrasto colla resistenza tanta celerità x, o tanta forza mx, quanta corrisponde alla forza $m'z$ della resistenza, cui vien comunicata la celerità z (70); onde la potenza non si muoverà, che colla

celerità $C - x$. Ora nel tempo, che il raggio A, cui è applicata la potenza, fa un giro Π colla celerità $C - x$, il raggio a, cui è applicata la resistenza, ne fa uno π colla celerità z. Dunque (78) sarà

$C - x : z :: \Pi : \pi :: A : a$; onde $z = \frac{a(C-x)}{A}$.

Ma la forza mx fa per ipotesi equilibrio alla forza $m^1 z = m^1 a \left(\frac{C-x}{A}\right)$. Dunque $A.\ mx = \frac{a.\ (C-x)\, am^1}{A}$ (557); $x = \frac{a^2 m^1 C}{A^2 m + a^2 m^1}$; $z = \frac{AaCm^1}{A^2 m + a^2 m^1}$, che debbe essere un massimo. Differenziando pertanto, presa per variabile a, avremo $\frac{dz}{da} = \frac{(A^2 m + a^2 m^1)\, ACm - 2am^1.AaCm}{(A^2 m + a^2 m^1)^2} = 0$;

quindi $A^2 m = a^2 m^1$, che si trova essere il massimo cercato, da cui si ottiene $a = A \sqrt{\frac{m}{m^1}}$; onde per aver nell' argano il massimo effetto, convien, che sia $A : a :: \sqrt{m^1} : \sqrt{m}$.

Potrebbero queste considerazioni estendersi anche alle altre macchine; ma il fin qui detto basta per noi.

SEZIONE SECONDA

MECCANICA DEI FLUIDI

CAPITOLO I.

Idrostatica.

685. La Meccanica dei fluidi comprende la scienza dell' equilibrio dei fluidi detta propriamente *Idrostatica*, e la scienza del loro moto, che si chiama *Idrodinamica*, o anche *Idraulica*. Noi accenneremo sommariamente i principj più interessanti dell' una, e dell' altra.

686. Diconsi fluidi, o liquidi secondo la distinzione altrove stabilita (19) quei corpi, le cui particelle slegate, e indipendenti affatto le une dalle altre hanno una perfetta mobilità, e cedono per conseguenza al più piccolo impulso. È vero, che non si conosce in natura alcun fluido, o liquido, cui esattamente convenga una tal definizione; poichè le particelle di tutti sono soggette a certe speciali attrazioni, che più, o meno si oppongono alla perfetta mobilità. Ma i Fisici per semplicizzare le loro considerazioni gli suppongono tutti perfettamente mobili in teorica, e si riserbano a correggere in pratica con particolari esperienze gli errori, che introduce nei resultati questa men che vera supposizione.

687 I fluidi si distinguono in omogenei detti incompressibili, perchè tali sono per piccole pressioni (19), e da molti chiamansi *liquidi*, e in eterogenei ed elastici, che diconsi propriamente *fluidi*. I fluidi omogenei hanno

tutti i loro strati non solo d'egual natura, ma anche di egual densità. Tali sono l'acqua, il mercurio, ec. Gli elastici, o eterogenei detti anche *misti*, o per la diversa pressione, o per la diversa qualità, o per altra ragione hanno nei loro strati ove una minore, ove una maggior densità.

I fluidi imperfetti, come l'arena, la cenere, ec., che per esser le loro parti soverchiamente grossolane non hanno la proprietà, che noi supponiamo (686), non possono formar l'oggetto delle attuali nostre ricerche. Ci crediamo per altro in dovere di avvisar gli Studiosi, che nel T 41 degli An. di Ch. e di Fis. *p.* 159, e nel T. 40 della Bib. Univ *p.* 29 si trova la relazione di molte interessanti sperienze del Sig. Huber-Burnand *sullo scolo, e sulla pressione della sabbia*, che spargono non poca luce sulla dottrina del moto dei fluidi imperfetti, e mostrano, che non è tanto inesatto, quanto per avventura potrebbe sembrare l'antico metodo di misurare il tempo coll'orologio a polvere.

688. Tutta la dottrina idrostatica suol dedursi, e noi la dedurremo dalla proprietà, che l'esperienza dimostra aver tutti i fluidi di trasmettere egualmente in ogni senso le pressioni esercitate sopra di loro: nel che consiste il principio di fatto conosciuto in Meccanica sotto il nome di *principio d'eguaglianza di pressione dei fluidi in ogni senso*.

Empiasi di acqua, o di altro liquido incompressibile fino all'altezza MN il vaso di qualunque figura AMCDNB (*Fig.* 47), che comunichi in E col tubo verticale Z, in F col tubo X comunque inclinato all'orizzonte. Nelle pareti, e nel fondo siano dei piccoli fori comunque diretti, e turati leggermente. Se con una certa forza se ne prema la superficie MN, vedremo, che il

liquido si solleva verticalmente nel tubo Z, obliquamente nel tubo X; e cacciando i turaccioli, spilla dai fori del fondo, e delle pareti per qualunque direzione. Gli effetti adunque della pressione su questa massa liquida manifestansi in tutte le direzioni, e in ogni senso; e quindi conosciamo, che in tutte le direzioni, e in ogni senso son trasmesse dai liquidi le pressioni esercitate sopra di essi. Ci persuaderà poi, che lo sono in ogni senso egualmente la seguente semplicissima esperienza. In una vessica, o altro flessibil recipiente pieno di liquido, d'acqua per es., s'introduca un fragilissimo guscio d'uovo, o un globetto di sottilissimo vetro. Se sopra questo recipiente si ponga un grosso peso, si eserciterà una notabil pressione sul liquido, e quindi sul guscio d'uovo, o sul globetto; e pure per quanto fragilissimi ei siano, non si romperanno. Ciò non potrebbe accadere, se non fosser premuti per ogni verso egualmente, sì che gli effetti delle pressioni opposte si distruggessero.

Questi, ed altri moltissimi simili sperimenti dimostrano evidentemente la verità dell'enunciato principio d'eguaglianza di pressione dei fluidi in ogni senso. Ora per isvilupparlo supponiamo, che un vaso prismatico retto sia pieno di un fluido incompressibile, che per maggior semplicità si considera per ora come non grave. Se sulla superficie superiore di questo fluido si eserciti per mezzo d'uno stantufo, che abbia l'area A eguale alla base orizzontale del vaso, una pressione verticale P, la detta base parallela allo stantufo soffrirà una pressione P; ed ogni punto, o porzioncella a di essa base una pressione proporzionale alla sua ampiezza, ed equivalente ad una forza verticale, che abbia alla pressione sull'intera base il rapporto, che la sua

ampiezza ha all' ampiezza della base, cioè che sia espressa per $\frac{Pa}{A}$. Pel principio *d'eguaglianza di pressione* questa stessa pressione è sofferta non solo da tutte le porzioncelle o punti a della base, ma anche da tutte le porzioncelle delle pareti, dello stantufo, e della massa fluida, che abbiano l' ampiezza a.

Così parimente se in una parete verticale di un vaso prismatico pieno esattamente di fluido incompressibile considerato come non grave si scavi un foro dell'ampiezza A, e vi si faccia normalmente con uno stantufo della base A una pressioue P; per l'accennato principio dell' eguaglianza di pressione soffriranno una pressione $\frac{Pa}{A}$ non solo tutti i punti a della porzione A corrispondente allo stantufo nell' opposta parete verticale; ma ancora tutti gli altri punti, o porzioncelle a delle altre pareti verticali, e orizzontali, e della massa fluida.

Tutto ciò si verifica anche quando il vaso sia un poliedro qualunque di lati finiti, o infinitesimi, prendendo in quest' ultimo caso infinitesime le porzioncelle premute. Se si supponga $= \omega$ una porzioncella elementare, sarà $\frac{P\omega}{A}$ la pressione da essa sofferta. Ora detta p la pressione esercitata sull' unità di superficie, abbiamo $p : 1 :: P : A; p = \frac{P}{A}$; dunque la pressione sofferta da una porzioncella infinitesima, o da un elemento ω della superficie sarà espressa per $p\,\omega$.

689. Se il fluido così premuto è grave, trasmette anch'esso la pressione egualmente in ogni senso. Lo sperimento del numero superiore fatto sopra un liquido grave lo dimostra chiaramente. In tal caso peraltro

alla pressione estrinseca se ne unisce un' altra dovuta al peso del fluido, varia ne' varj punti sì della massa fluida, come delle pareti. Generalmente parlando, un fluido, le cui particelle siano sollecitate da una data forza acceleratrice, e segnatamente dalla gravità, esercita in conseguenza di questa forza una pressione contro tutti i punti delle pareti necessarie al suo equilibrio indipendentemente da qualunque estrinseca azione. (Diconsi *necessarie all' equilibrio* del fluido quelle pareti, nelle quali facendo un foro, il fluido ne escirebbe naturalmente). Vediamo infatti, che l' acqua, e ogni altro liquido raccolto in dose sufficiente entro di un vaso è capace di cacciar fuori da per se senza alcuna pressione estrinseca il turacciolo d' un foro, che sia nelle pareti (necessarie all' equilibrio) in qualunque direzione.

690. Ma questa pressione dipendente dalla gravità non è eguale, come abbiamo notato, in tutte le altezze, e in tutti i punti di una massa liquida. Adattato lo stantufo S alquanto peso, e facilmente mobile all' orifizio B del cilindro vuoto AB (*Fig.* 48) per mezzo del filo C da tenersi, occorrendo, con una mano, se si vada immergendo verticalmente il cilindro collo stantufo in un vaso PQ pieno d' acqua, si osserva, che in principio conviene sostenere il filo, perchè lo stantufo non cada. Ma ad una certa profondità per quanto si lasci il filo, lo stantufo resta immobile presso l' orifizio del cilindro senza cadere; e ad una profondità maggiore viene anche sospinto in alto. Ciò mostra evidentemente, che la pressione esercitata di basso in alto dal liquido grave a piccola profondità non è sufficiente a sostener lo stantufo, o ad equilibrar la pressione, che esso esercita d' alto in basso; ma ben la equilibra, e la vince

ancora a maggior profondità. Così parimente se nelle pareti di un vaso pieno d' acqua siano dei fori a diverse altezze, perchè l' acqua non ne sgorghi cacciandone i turaccioli, bisogna, che questi siano applicati con tanto maggior forza, quanto i fori sono più bassi. Dunque la pressione prodotta dalla gravità in una massa liquida cresce al crescere della profondità. E ben si comprende, che così deve essere; perchè la pressione in ogni punto dipendendo dal peso delle particelle, che li stan sopra, dee crescere al crescere del numero di queste, che va crescendo colla profondità, come è evidente.

È chiaro da ciò, che la pressione di un fluido grave non è costante, che in uno strato infinitesimo orizzontale; vale a dire, che sono affette da egual pressione, e perciò egualmente premono solo quelle particelle piccolissime di una massa fluida, che si trovano in un medesimo piano orizzontale; e questa pressione dall' essere insensibile o nulla nella superficie superiore, detta ancora *livello*, si va riducendo tanto maggiore, quanto maggior si riduce la profondità degli strati orizzontali, da cui risulta essa massa.

Ora le particelle così premute per il principio sopra esposto trasmettono la loro pressione egualmente in ogni senso. Realmente se si faccian dei fori eguali nelle pareti o verticali, o orizzontali, o comunque inclinate all' orizzonte d' un recipiente pieno d' acqua, o di altro liquido, e vi si tengano applicati i turaccioli per mezzo di pesi opportunamente adattati (per es. se siano sportellini a cerniera chiusi coll' applicazione di un peso) si trova, che è necessario lo stesso peso per tener chiuso un foro di eguale ampiezza sia verticale, sia

inclinato comunque all'orizzonte, purchè l'acqua sia sopra di esso foro ad un'altezza eguale.

Se pertanto un fluido grave sia contenuto in un vaso chiuso, e tutte le pareti siano necessarie all'equilibrio (ne vedremo degli esempj in appresso) esse pareti soffriranno una pressione, e premeranno il fluido, come se al medesimo fosse applicata esternamente una forza comprimente: perciò la pressione, che in tal caso soffrirà una data parte delle pareti risulterà dalla somma della pressione variabile dovuta alla forza acceleratrice, e della pressione costante prodotta dalla reazione delle pareti.

691 Il principio dell'uguaglianza di pressione conviene tanto ai fluidi detti incompressibili, quanto agli elastici. Solo è da notarsi rispetto a questi ultimi, che la pressione costante (690) è in essi dovuta alla elasticità, che in ciascun fluido elastico è proporzionale alla densità, e non vi ha bisogno perchè si eserciti, che alcuna forza estrinseca prema il fluido.

692. Stabiliti questi principj di fatto, ben facilmente possono trovarsi le equazioni d'equilibrio per una massa fluida ABCD omogenea, o eterogenea, incompressibile, o compressibile, le cui particelle siano affette dalla forza di gravità, o da qualunque altra forza acceleratrice. Immaginati nello spazio tre assi ortogonali (*Fig.* 49) OX, OY, OZ, siano x, y, z le coordinate parallele a questi assi per un punto qualunque. Sia il piano delle $x\,y$ orizzontale, e situato al di sopra della massa fluida; sia l'asse OZ verticale, e al disotto del detto piano. Supponiamo la massa fluida divisa in una infinità di parallelepipedi rettangolari infinitesimi limitati da piani paralleli a quelli delle coordinate infinitamente vicini gli uni agli altri. I lati di questi parallelepipedi saranno paralleli, ed eguali alle differenziali delle coordinate. Le due basi orizzontali di quello, che corrisponde alle coordinate x, y, z saranno $dxdy$; dz ne sarà l'altezza, e

$dxdydz$ l' intero volume. Ognuno di questi prismettini potrà assumersi per l' elemento del volume, e in ciascuno di essi la densità D del fluido potrà riguardarsi come costante; onde se la massa ne sia indicata per dm, sarà $dm = Ddxdydz$. La quantità D sarà una costante ne' fluidi omogenei incompressibili, e una funzione di x, y, z negli elastici non compressi egualmente per tutto.

Siano X, Y, Z le somme delle componenti delle forze acceleratrici secondo gli assi OX, OY, OZ. Nell' estensione dell' elemento dm qualunque forza acceleratrice potendosi prender per costante, i prodotti Xdm, Ydm, Zdm saranno le forze motrici di questo elemento parallele agli assi OX, OY, OZ.

Le sei facce del prisma $dxdydz$ sono premute di fuori in dentro dal fluido ambiente, e le loro pressioni debbono fare equilibrio alle tre forze Xdm, Ydm, Zdm. Essendo p la pressione verticale sofferta dall' unità di superficie secondo la direzione OZ, la pressione sulla superficie orizzontale superiore dell' elemento, che si considera sarà $pdxdy$. La quantità p varierà secondo, che varia la posizione di questo elemento, e conseguentemente sarà una funzione di x, y, z. Se pertanto restando costanti x, y, la coordinata z divenga $z + dz$; p diventerà $p + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz$; e la pressione sulla superficie inferiore sarà $[p + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz]\, dxdy$. Dunque il prisma $dxdydz$ soffrirà nella superficie superiore la pressione $pdxdy$, che tende ad abbassarlo, e nell' inferiore la pressione $[p + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz]\, dxdy$, che tende a sollevarlo. Sarà dunque affetto da una pressione eguale all' eccesso della seconda sulla prima; e perchè esso possa stare in equilibrio, questo eccesso dovrà essere $= Zdm$. Avremo dunque $\left(\frac{dp}{dz}\right) dzdxdy = Zdm$. Nella stessa maniera troveremo, che per l' equilibrio del prismettino considerato debbono aversi anche le equazioni $\left(\frac{dq}{dy}\right) dxdydz = Ydm$;

$\left(\frac{dr}{dx}\right) dydxdz = Xdm$, chiamando q, ed r le pressioni riferite all' unità di superficie, che si esercitano secondo y, e x.

Sostituendo i valori di dm in queste equazioni, e togliendo il fattor comune $dxdydz$, avremo

$$(1)\ \left(\frac{dp}{dz}\right) = DZ;\ \left(\frac{dq}{dy}\right) = DY;\ \left(\frac{dr}{dx}\right) = DX.$$

Ora l' eguaglianza della pressione in ogni senso dovendo aver luogo non tanto nella intera massa fluida, quanto ancora in ognuna delle sue porzioncelle, o elementi; la pressione sopra una superficie pel prismettino elementare considerato dee trasmettersi anche all' altre; talchè se $pdxdy$ rappresenti la pressione sopra una delle facce orizzontali, le pressioni trasmesse sulle verticali dovranno esser rappresentate nel tempo medesimo da $pdrdz$, e da $pdydz$; giacchè anche le forze acceleratrici X, Y, Z si possono riguardare come costanti per tutto l' elemento dm; e perciò avremo $pdxdz = qdxdz$; $pdydz = rdydz$, cioè $p = q$; $p = r$, e si posson prendere come eguali le quantità p, q, r nelle tre equazioni (1), che perciò diventano

$$(2)\ \left(\frac{dp}{dz}\right) = DZ;\ \left(\frac{dp}{dy}\right) = DY;\ \left(\frac{dp}{dx}\right) = DX.$$

693. Queste sono le equazioni generali dell' equilibrio dei fluidi. Ora se dopo aver moltiplicata la prima per dz, la seconda per dy, la terza per dx si sommino, avremo

(3) $dp = D\,(Xdx + Ydy + Zdz)$.

Dunque

694. 1.° Perchè si abbia equilibrio in una massa fluida, fa d' uopo, che possa trovarsi per p una funzione di x, y, z capace di sodisfare all' equazioni (2); o sivvero, che come dp è differenziale esatta nell' equazione (3); così sia differenziale esatta la quantità $D\,(Xdx + Ydy + Zdz)$. Reciprocamente se $D\,(Xdx + Ydy + Zdz)$ è una differenziale esatta si prenderà p eguale all' integrale di questa formula, e così si sodisfarà alle equazioni (2); e potrà aversi l' equilibrio. È noto, e noi l' abbiamo accennato anche altrove, che questa formula è differenziale esatta, quando

$$\left(\frac{d.DX}{dy}\right)=\left(\frac{d.DY}{dx}\right);\left(\frac{d.DX}{dz}\right)=\left(\frac{d.DZ}{dx}\right);\left(\frac{d.DY}{dz}\right)=\left(\frac{d.DZ}{dy}\right).$$

695. 2.° Se il fluido è omogeneo incompressibile, la quantità D è costante, e perchè sia possibile l' equilibrio basterà, che sia differenziale esatta la formula $Xdx + Ydy + Zdz$.

696. 3.° Il valore di p esprime la pressione riferita all' unità di superficie, che il fluido esercita in un punto qualunque, le cui coordinate siano x, y, z o nell' interno, o nella superficie della massa. Quando dunque la massa fluida è contenuta in un vaso, si avrà la pressione sofferta dal vaso in ogni suo punto, ponendo nel valore di p le coordinate convenienti a quel punto in luogo delle x, y, z. Questa pressione è distrutta dalle pareti resistenti del vaso; ma ne' luoghi, ove non son *necessarie* le pareti, e il fluido è interamente libero, nulla potendo distruggere questa pressione, bisogna, ch' ella non esista, perchè il fluido possa essere in equilibrio.

Ciò per altro s' intende solo de' fluidi incompressibili, giacchè quanto agli elastici la pressione per ciascuno di essi è proporzionale alla densità, e perciò un fluido elastico non può essere in equilibrio, se non sia tutto rinchiuso in un vaso, o se la sua densità non si riduca insensibile.

697. 4.° Quando p è nulla, ovvero quando è costante, si avrà $dp = 0$, e quindi $Xdx + Ydy + Zdz = 0$. Questa è l' equazione della superficie del fluido in equilibrio, quando la pressione è nulla, o quando è costante.

698. 5.° È noto, che tirando su questa superficie una normale, essa farà cogli assi delle x, y, z degli angoli, i coseni dei quali saranno respettivamente espressi per $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$, posto $R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$. (Vedi *Biot Essai de Géo. anal. appliquèe aux courbes de second ordre n.* 65): ma tali sono anche i coseni degli angoli, che co' detti assi fa la risultante delle forze X, Y, Z. Dunque questa risultante coincide colla normale alla superficie, e conseguentemente la risultante delle forze acceleratrici, che agiscono su ciascuna particella contenuta in essa superficie, ove il fluido sia in equilibrio, è normale alla superficie medesima, come

debbe essere, perchè ne resti distrutto interamente l'effetto. Questa superficie è detta *superficie di livello*.

699. 6:° La formula $Xdx + Ydy + Zdz$ è esattamente integrabile, quando le forze acceleratrici sono dirette verso dei centri fissi, e le loro intensità sono funzioni delle distanze di questi centri (344). Dunque una massa fluida soggetta a forze acceleratrici di tal genere può stare in equilibrio, ma perchè effettivamente vi stia, è d'uopo (698), che la risultante di queste forze sia normale alla supecficie del fluido in tutti quei punti, in cui non si oppongono al fluido le pareti del recipiente.

700. Quindi si determina per ogni caso particolare la special configurazione, che prende la superficie d'una massa fluida in equilibrio. Se per es. il fluido non sia soggetto, che ad una sola forza d'attrazione diretta verso un determinato centro, la figura, che prende naturalmente una massa di questo fluido sarà quella d'una sfera, che abbia per centro il punto, cui è diretta l'attrazione.

Se questo centro sia moltissimo lontano, le direzioni della forza per le particelle, che non sono tra loro a notabil distanza divengon parallele, e un non molto ampio tratto di questa superficie diviene un piano normale alle direzioni dell'attrazione. Tale è il caso de' fluidi affetti dalla gravità.

Stabilita la dottrina generale dell'equilibrio dei fluidi, ne faremo due importanti applicazioni, 1.° all'equilibrio dei fluidi gravi; 2.° all'equilibrio de' gravi immersi nei fluidi.

Dell' equilibrio dei fluidi gravi.

701. Importantissima è la dottrina relativa all'equilibrio dei fluidi gravi, e noi ci tratterremo ad esporla con qualche diffusione, riferendo specialmente all'acqua il nostro discorso.

Quando un liquido grave è in equilibrio, il livello, o la superficie libera, quella cioè, cui non son *necessarie* (689) le pareti, debbe essere in tutti i punti nor-

male alla direzione della gravità (699). Poichè una particella qualunque elementare dalla detta superficie per essere in equilibrio come è egualmente premuta dagli elementi laterali, così dee premergli egualmente. Bisogna dunque, che la gravità, da cui è affetta, e per cui preme, abbia tal direzione, che possa decomporsi in due perfettamente eguali componenti secondo gli elementi laterali della superficie. Ma per questo è necessario, che non sia inclinata più verso l'uno, che verso l'altro; convien dunque, che la direzione verticale della gravità sia normale alla superficie nel punto, in cui trovasi la particella considerata. Dee dunque la superficie libera d'un liquido in equilibrio essere orizzontale: e potremo conoscere, se un liquido è in equilibrio, o in moto, osservando, se la superficie ne è parallela, o inclinata all'orizzonte. Ora nel caso che il rapporto dell'ampiezza del recipiente al raggio terrestre sia trascurabile, le direzioni della gravità di tutte le particelle saranno sensibilmente parallele; ma ove sia notabile, saran convergenti. Quindi la superficie del liquido è piana in un piccolo, sferica (700) o sferoidica in un ampio recipiente. Il Picard calcolò, che sulla superficie terrestre per uno spazio di 100 tese la curvatura del livello di un fluido non differisce da un piano, che per linee $1 \frac{1}{2}$; cioè se (*Fig.* 50) BC indichi il livello, BD la tangente, sarà $DC = 1 \frac{1}{2}$ linee, posto $BD = 100$ tese. Se $BD = 200$ tese, $CD = 5 \frac{1}{3}$ linee. Se $BD = 300$ tese, $DC = 1$ poll. Perciò in un piccol tratto di mare, o di lago, il livello dell'acqua può considerarsi come un piano geometrico.

702. Preso il piano, o la superficie di livello della massa fluida per il piano delle coordinate xy, l'asse delle z ne

sarà verticale, e diretto nel senso della gravità g. Siccome poi quando la forza acceleratrice è la sola gravità, le componenti X, Y sono zero, e $Z = g$; così avremo $dp = Dgdz$, e integrando, $p = Dgz$ senza costante, perchè essendo $Z = 0$; $p = 0$; e poichè nell' acqua la densità è costante, relativamente ad essa si avrà $p = gz = ag$, facendo $D = 1$; $z = a$. Dunque

703. La pressione p sull' unità di superficie come dipende dal peso delle particelle, che le sovrastano (690), così è eguale al prodotto della gravità g nel prisma aqueo, che ha per base l' unità di superficie, e per altezza la distanza a della superficie premuta dal livello. Laonde poichè $1 : p :: b : bp = P$, la pressione P sulla piccolissima superficie b d' una particella elementare sarà eguale al peso del prisma ab sovrastante alla medesima; cioè $P = abg$ (49), fatto $D = 1$, giacchè supponiamo il fluido omogeneo; ed essendo g una quantità, che può prendersi per costante, P varierà solo al variare di a. Ma le particelle d' una massa fluida in equilibrio sono premute, e premono egualmente in ogni senso. Dunque le pressioni sofferte, ed esercitate in ogni senso per l' azione della gravità dalle minime particelle d' una massa fluida in equilibrio aventi la superficie b, sono generalmente espresse per la formula $P = g. ab$. Quindi

704. I. Un fluido equilibrato in due, o più tubi comunicanti CcB; DbB (*Fig.* 51) arriva in tutti alla medesima altezza. Poichè ogni minima particella b situata sulla stessa linea orizzontale nel liquido intermedio ai due tubi dee soffrire egual pressione per ogni verso. Ora dette a, a' le altezze del liquido nei due tubi BC, BD al di sopra di questa linea, ogni particella soffre per la parte del tubo BC la pressione abg, e per la parte del tubo BD la pressione $a'bg$. Sarà dunque

$abg = a'bg$; $a = a'$. Questa verità serve di fondamento all' arte di *livellare*, a quell'arte cioè, con cui si determina quale di due luoghi sia più vicino, e quanto più vicino al centro della terra. Possono vedersene le regole nei libri dei Pratici, e segnatamente nelle opere intitolate *Essai sur le nivellement par M. Busson-Descars*; *Traité de topographie, d' arpentage; ec. par Puissant*; e *Nouveau traité de l' arpentage par A. Le Févre*.

705. II. Tutti i punti b delle pareti, e del fondo di un recipiente pieno di fluido in equilibrio soffrono dalle contigue particelle una pressione $= abg$, essendo sempre espressa per a la distanza del punto premuto dal livello. E siccome perchè il fluido possa stare in equilibrio, questa pressione dee rimanere interamente distrutta, così la direzione ne dee esser normale alla superficie premuta.

* 706. Perciò in un recipiente pieno di fluido in equilibrio i punti b d' una parete, che faccia coll' orizzonte un angolo φ, soffriranno per la decomposizione della pressione normale abg una pressione orizzontale $= abg\ sen.\ \varphi$, ed una verticale $= abg\ cos.\ \varphi$. Laonde riducendosi $\varphi = 0$, e perciò $sen.\ \varphi = 0$, svanirà ogni pressione orizzontale; e svanirà ogni pressione verticale, riducendosi $\varphi = 90°$; e perciò $cos.\ \varphi = 0$.

707. Ma qualunque sia la pressione, contro le particelle prementi, reagiscono egualmente i punti premuti (70). Perlochè il primo strato di particelle contigue al fondo, o alle pareti del recipiente dee risentire dal fondo, o dalle pareti una pressione eguale, e direttamente opposta a quella, che risente dal secondo strato contiguo (703). Ma questo dee risentire dal terzo una pressione eguale, e direttamente opposta a quella, che risente dal primo, e così sempre. Dunque

ogni strato dee soffrire dalli strati contigui, cui è frapposto, eguali, e direttamente opposte pressioni, che variano nei diversi punti, secondo che varia l'altezza a. Perciò se nel recipiente MNQH (*Fig.* 52) si consideri particolarmente lo strato di particelle DBA, potremo dire, che esso soffre egual pressione dal fluido ACDMNQH, e dal fluido DBA. Pertanto se questo sottilissimo strato consolidandosi formi una capacità DBA, soffrirà sempre dal fluido esterno una pressione eguale a quella, che soffre dal fluido interno. Ora se si supponga estratto il fluido dalla capacità interna ABD, o dall'esterna ACDMNQH, non vi ha ragione, per cui debba variare la pressione, che su detto strato esercita il fluido rimanente esterno, o interno. Perciò lo strato sarà egualmente premuto sia ripieno, o sia circondato di fluido. Onde può stabilirsi in generale, che un recipiente di sottili pareti soffre egual pressione o sia ripieno, o sia circondato da un fluido, purchè ne sia il livello tanto nell'uno, che nell'altro caso nel medesimo piano.

708. III. In un vaso di figura irregolare per es. AaCDbB (*Fig.* 53) pieno di fluido in equilibrio si tiri la linea mn dall'una all'altra parete parallelamente al livello AB; e dal punto q si sollevi la normale qc $= a$ misura della distanza della particella fluida q $= b$ dal livello. Questa particella soffre in ogni senso la pressione $P = a.\ bg$ (703). Ma tutte le eguali particelle, che sono in detta linea debbono soffrire egual pressione. Dunque la particella m, o la n contigua alla parete Db, o Ca soffrirà come in ogni senso, così d'alto in basso una pressione abg. Ma d'alto in basso non agisce su questa particella, che il corrispondente punto della parete contigua. Dunque per la resistenza della parete soffrirà

una pressione eguale a quella, che soffrirebbe, se le sovrastasse una colonna mS del fluido stesso. Per lo che premerà le particelle inferiori, e quindi il fondo, come lo premerebbe, se fosse realmente gravata da una colonna fluida mS.

Al contrario, se la figura del recipiente sia tale, che le pareti divergano dal fondo in modo, che una verticale abbassata da m ne cada fuori, questa particella non eserciterà pressione alcuna sul fondo. Ma ciò, che abbiamo detto della particella m può dirsi di tutte le altre particelle contigue alle pareti sì convergenti, che divergenti dal fondo. Dunque il fondo non è gravato, che dalle particelle comprese tra i piani verticali, che limitano la sua estensione: e queste lo gravano con pressioni espresse generalmente per *abg*. Dal che è chiaro, che la pressione totale sul fondo d'un recipiente è eguale alla somma dei pesi di tutti i prismi fluidi, che hanno per base ciascun elemento del fondo, e per altezza l'altezza stessa del fluido. Per lo che i recipienti d'egual fondo, e altezza risentono sul fondo egual pressione dal fluido, che li riempie, per quanto ne sia diversa la figura. Così il fondo CD sarà egualmente premuto o sia il vaso della figura MFDC, o della figura AaCDbB, o della figura LCDH, purchè il fluido arrivi sempre al livello LH.

L'esperienza conferma luminosamente questo risultato del ragionamento. Lo stantufo MDN (*Fig.* 54) sostenuto da un filo DC attaccato colla sua estremità superiore C al braccio d'una bilancia AQC serva di fondo mobile al recipiente cilindrico LB, ed essendo ben pulito, ed unto con grasso, possa facilmente sollevarsi, e deprimersi, per quanto combaci esattissimamente colle pareti. Infusa in questo cilindro tant'a-

cqua, che ne giunga il livello all' altezza p q, la pressione ne farebbe abbassare lo stantufo; ma tengasi in equilibrio ponendo quel peso *P*, che occorre nel piatto R della bilancia. Questo peso misurerà la pressione esercitata dall' acqua sul fondo MN. Ora il recipiente sia formato in modo, che si possa a piacere cangiare la porzione delle pareti, che resta alcun poco al disopra di MN. Tolta pertanto la porzione cilindrica, vi si adatti primieramente un recipiente conico d z r c colle pareti divergenti in alto, e si empia d' acqua fino all' altezza p q. Quindi tolto pur questo, se gli sostituisca un recipiente d a b c conico anch' esso, ma colle pareti divergenti in basso, e si empia parimente d' acqua fino all' altezza p q. Si osserverà, che il medesimo peso farà equilibrio alla pressione sul fondo MN in tutti e tre i casi; e quindi concluderemo, che in tutti e tre i casi la pressione è la stessa precisamente.

Quindi si deduce, che

769. 1.° La pressione esercitata da un fluido sul fondo d' un recipiente può essere eguale, maggiore, e minore del peso del fluido stesso. È eguale, se il vaso è un prisma retto; è minore, se il vaso è piramidale più stretto in basso; che in alto; maggiore, se il vaso è pur piramidale, ma più stretto in alto, che in basso.

710. 2.° Si può agevolmente aumentare, o diminuire la pressione di un fluido, cioè colla medesima quantità di fluido si possono produrre pressioni molto diverse, variando la figura del recipiente. Così per es. con poche libbre di acqua infuse nel tubo cd lungo otto, o dieci piedi comunicante col recipiente MD (*Fig.* 53) pieno d' acqua si aumenterà la pressione

contro il fondo DC, quanto si aumenterebbe per l'aggiunta di una colonna di fluido, che avesse per base il fondo del recipiente, e per altezza la lunghezza del tubo cd.

I Fisici per dimostrar coll'esperienza questo così detto *paradosso idrostatico* introducono per mezzo del lungo tubo AB nel mantice molto resistente CD (*Fig.* 55) dell'acqua; e osservano, che mantenendosi pieno il tubo, l'acqua per quanto sia poca, esercita sul fondo, e sulla parete superiore del mantice tal pressione, che solleva dei pesi collocativi sopra tanto più grandi, quanto il tubo è più lungo.

Dunque la pressione è ben diversa dal peso, onde per determinarne la quantità bisogna prevalersi di metodi ben diversi da quelli, con cui si determina la quantità del peso. Il seguente è il più comunemente usato.

711. Dal principio d'eguaglianza di pressione si deduce, che la pressione d'una massa fluida contro qualunque punto delle pareti di un recipiente, siano esse orizzontali, o verticali, o comunque inclinate all'orizzonte, è precisamente la stessa, se la stessa precisamente è l'altezza del fluido sopra il punto considerato; onde la formula $a \times bg$ può rappresentar la pressione contro qualunque punto, o elemento infinitesimo b delle pareti, o del fondo. Ma questa espressione può riguardarsi come il momento del peso bg riferito al piano di livello del fluido. Dunque la somma delle pressioni su tutti gli elementi infinitesimi delle pareti, e del fondo si potrà riguardare come la somma dei momenti di tutti i loro pesi riferiti al piano di livello. La qual somma essendo eguale al momento della somma di tutti i detti pesi riuniti nel centro di gravità della parete, o del fondo

riferito al medesimo piano (235), ne dedurremo, che *la somma di queste pressioni, o la pressione totale sofferta dal fondo, o da una parete sarà eguale al peso d' un prisma di fluido, che abbia per base la superficie del fondo, o della parete, e per altezza la distanza del suo centro di gravità dal livello del fluido*.

Data dunque per la Geometrìa l' espressione della superficie del fondo, o della parete, si avrà la pressione moltiplicando quella espressione per il prodotto della gravità specifica del fluido nella distanza del lor centro di gravità dal piano del livello.

712. Ora convien distinguere i casi, in cui la superficie premuta è piana, o curva. Se sia piana, l' espressione generale data per le coordinate ortogonali ne è $\int ydx$; se è curva, e prodotta dal moto progressivo d' una linea curva tale, quale è rappresentata in profilo da DRC nella Figura 62, detta l la lunghezza dell' elemento indicato da Rr $= ds$, ne sarà l' espressione $\int l\,\mathrm{Rr} = \int l\,ds$. Supponendola poi generata dalla rivoluzione di una figura intorno ad un asse, si esprimerà colla nota formula generale $2\pi \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi \int yds$. Moltiplicando queste espressioni per g, e quindi respettivamente pelle formule generali dei numeri 217, 215, 224, che danno le respettive distanze del centro di gravità di queste superficie dall' asse, o piani dei momenti, avremo la pressione sulle pareti, o fondi piani generalmente espressa per $P = g \int xydx + C$; e sulle pareti, o fondi curvilinei per $P = g \int lxds + C$; ovvero per $P = 2\pi g \int xy \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C$; si esprime per C una costante. E qui si noti, che

1.° La quantità g indica in queste formule la gravità specifica del fluido. Tutte le volte, che non sarà necessario per le circostanze di considerare distintamente la forza acceleratrice di gravità, e la densità d' un corpo, esprimeremo la gravità specifica colla lettera g, o γ.

713. 2.° Essendo il fondo, o le pareti del recipiente, che

si considera inclinate all' orizzonte per un angolo φ, converrà moltiplicare le formule ora trovate per $sen.\ \varphi$, o per $cos.\ \varphi$, quando si vogliono le pressioni orizzontali, o le verticali (206).

714. 3.° Ponendo l' origine delle x nella sezione del loro asse col piano di livello del fluido, si ha $C = 0$; perchè quando $x = 0$ tutto svanisce. Ma ponendola al disotto del livello, la costante diviene eguale al peso della colonna fluida superiore.

715. Per fare un' applicazione delle formule sopra stabilite, sia la superficie premuta il segmento sferico NCP, che serve di fondo al vaso cilindrico ACB (*Fig.* 57). Detto r il raggio della sfera, cui appartiene il dato segmento, MZ $= x$, RZ $= y$, avremo $ds = \frac{rdx}{y}$; e perciò $P = 2\pi gr \int xdx + C = \pi grx^2 + C$. E sicome quando $x = 0$, $y =$ NM, e la pressione residua è eguale al peso del prisma fluido ANMPB, che ha per altezza MD $= a$ (712); così avremo $C = ag\pi.\, y^2$; e l' intera pressione sofferta dal fondo, fatto $x =$ MC $= c$, sarà $P = \pi g\ (rc^2 + ay^2)$.

716. Dopo tutto ciò egli è facile di trovare nella parete piana ST (*Fig.* 58) d' un recipiente pieno di un fluido, che abbia la gravità specifica g, il punto P, per cui passa la risultante di tutte le pressioni parziali, che ella soffre, o sia il *centro di pressione*.

Il livello del fluido corrisponda alla linea AB, e la linea Fm divida il piano in due eguali, e simili parti. Tirate normalmente su questa linea le ordinate infinitamente vicine RG, rg, sia FR $= x$; Rr $= dx$; RG $= y$. Siccome noi supponiamo i fluidi in equilibrio, l' azione delle colonne fluide può considerarsi come l' azione di verghe inflessibili; laonde il punto, per cui passa la risultante delle loro pressioni potrà determinarsi col metodo stesso, con cui determinammo il centro d' equilibrio delle forze parallele (176). E poichè il centro di pressione dee trovarsi, come è evidente, nella linea Fm, che divide il piano premuto in due eguali, e simili parti; la posizione ne sarà data dal valore della sola coordinata Z, che ne misura la distanza dal piano di livello; valore, che è eguale al quoziente della som-

ma di tutti i momenti delle pressioni riferiti al detto piano divisa per la somma delle pressioni medesime.

Per tanto la pressione sull' elemento Rg del piano essendo $dP = gxydx$ (712), e il momento riferito al piano di livello $gx^2 ydx$; sarà la distanza FP $= Z = \frac{\int yx^2 dx}{\int yxdx}$. Si osservi per altro, che sè il piano ST fosse obliquo all' orizzonte, e facesse col medesimo l' angolo φ, bisognerebbe moltiplicare per *sen.* φ il valore della pressione, e prendere la distanza dell' elemento Rg dal piano del livello $= x$ *sen.* φ; onde si avrebbe $Z = \frac{sen.\ \varphi \int yx^2 dx}{\int yxdx}$.

717. Se la superficie premuta sia un parallelogrammo, la cui semibase mT $= y = b$, l' altezza mF $= a$; sarà $Z = \frac{2}{3} x = \frac{2}{3} a$, fatto $x = a$; cioè il centro di pressione sarà ai $\frac{2}{3}$ dell' altezza cominciando a contar dal livello.

718. Abbiamo fin qui supposti omogenei, ed incompressibili i fluidi nel calcolarne la pressione, ed abbiamo perciò potuto far $D = 1$ nella formula generale del n.° 703. Resta per compire questo trattato, che aggiungiamo qui alcune considerazioni su' fluidi eterogenei, o *misti*. Con questo nome indichiamo quei fluidi, la cui densità varia nelle diverse loro sezioni orizzontali. Talchè può ogni fluido misto esser considerato come un complesso di strati di fluidi di gravità specifica diversa. Qualunque per altro sia la gravità specifica di questi diversi strati, perchè il loro complesso sia in equilibrio, ogni fluido dee esser ridotto in uno strato distinto; i fluidi più pesanti debbono esser sotto i men pesanti secondo i rapporti delle gravità specifiche; e tutti gli strati debbono avere un perfetto livello, cioè le loro superficie debbono esser normali alla direzione della gravità. Ciò è dimostrato per lo strato superiore (701). Siccome poi le particelle, che costi-

tuiscono la superficie d' uno strato sottoposto per es. del terzo (e ciò, che si dice d' uno strato s' intenda di tutti) debbono esser tutte egualmente premute, così debbono esser egualmente alti i filetti fluidi, che stan sopra di esse; e ciò non potrebbe avverarsi, se esse non fossero tutte nello stesso livello.

719. Egli è poi evidente, che se diversi strati di fluidi eterogenei si contengano in un recipiente, la pressione, che ne soffrono il fondo, e le pareti dee eguagliare quella, che ne soffrirebbero, se il recipiente contenesse un fluido omogeneo distribuito in strati, che compensassero colla diversa respettiva altezza la diversa respettiva gravità specifica. Per ciò anche in tal caso la pressione sofferta da una qualunque particella del fondo, o delle pareti sarà eguale al peso del filo, o prisma di fluido, che le sovrasta (703). Chiamando z l' altezza del fluido sopra la particella qualunque nG (*Fig.* 57) della parete, o del fondo, D la densità, o gravità specifica del fluido presso nG, il peso del filo o prisma fluido soprincombente a nG è evidentemente nG. $\int gDdz$ (qui si esprime per g la forza acceleratrice di gravità, che si assume come costante). Dunque la pressione sofferta dal punto, o elemento nG sarà nG $\times \int gDdz$; e la pressione totale sofferta dalla parete, cui nG appartiene, sarà $\int$ nG $\times \int gDdz$; espressione, che potrà integrarsi, essendo D data per z; vale a dire essendo la densità del fluido espressa per una funzione cognita dell' altezza.

720. Si voglia pertanto la pressione sofferta dal fondo Tn del recipiente ST (*Fig.* 58) ripieno d' un fluido, la densità de' cui strati KG, bd sono in ragione dell' altezze FR, FP Detta a l' altezza Fm; $z =$ FR; D la gravità specifica in R; Δ la gravità specifica in m, sarà $a : z :: \Delta : D = \frac{\Delta z}{a}$; onde $\int gDdz = \frac{g \int \Delta z dz}{a} = \frac{g \Delta z^2}{2a}$ senza costante, perchè tutto svanisce, quando $z = 0$; e facendo $z = a$, la pressione contro il fondo Tn sarà $\frac{1}{2} g \Delta a \times$ Tn.

721. Alla classe de' fluidi misti appartengono in un

certo senso anche gli elastici. Possono questi considerarsi come fluidi misti, la densità de' quali vada variando d'una maniera continua, cioè da strato a strato infinitesimo. Poichè essi hanno in virtù della elasticità l'attitudine a scemare, o crescere di volume, secondo che sono più, o meno premuti: e perciò, essendone gravi tutte le parti, debbono gli strati inferiori ridursi successivamente più densi, e tanto più densi, a circostanze pari, quanto più grande è il numero degli strati, che loro sovrastano. Quello dunque, che è stato detto de' fluidi misti s' applica ancora agli elastici.

E perciò la stessa formula servirà a rappresentare la pressione degli uni, e degli altri; avremo cioè anche pei fluidi elastici (detta b la parte premuta) $P = b \int g\, Ddz$. Non può darsi in generale una regola per esprimere la variabile D per z, senza fondarsi sopra ipotesi molto incerte, onde sarà necessario di ricorrere ne' casi particolari ad esperienze dirette.

722. Nei fluidi perfettamente elastici, lo sforzo dell' *elasticità* eguaglia esattamente la forza, con cui vengon compressi; vale a dire con quanta forza questi fluidi son compressi, con altrettanta tendono a dilatarsi, e premono gli ostacoli, che si oppongono alla loro dilatazione. Talchè la pressione de' fluidi elastici dipende non tanto dal loro peso, quanto principalmente dallo stato di compressione, in cui si trovano. E quindi è, che

723. 1.° Se una massa di fluido elastico premuta dal peso del fluido sopraincombente, e ridotta a un dato volume si serri dentro un recipiente, che non le permetta di dilatarsi, essa eserciterà contro le pareti del recipiente una pressione precisamente eguale a quella, che contro di esse si eserciterebbe dal fluido sopraincombente. Tutto questo si conferma colle e-

sperienze, e noi ne riferiremo alcune nel trattato dell' aria, che è il fluido elastico, su cui possiamo più comodamente sperimentare.

724. 2.° E siccome l' esperienza dimostra ancora, che generalmente al crescere della compressione proporzionalmente (almeno fino a un certo segno) scema il volume, e cresce la gravità specifica dei fluidi elastici; così generalmente le pressioni di eguali masse d' uno stesso fluido elastico si considerano come proporzionali reciprocamente ai volumi, e direttamente alle densità.

725. Supponiamo ora, che due colonne di fluidi eterogenei aventi la base b eguale si facciano scambievolmente equilibrio, o perchè siano effettivamente, o perchè agiscano come se fossero in tubi comunicanti. È chiaro, che le altezze a, a' ne saran reciproche alle densità, o gravità specifiche D, D'. Infatti dette P, P' le pressioni, abbiamo $P = abgD$; $P' = a'bgD'$ (si esprime per g la forza acceleratrice costante di gravità) ed essendo per l' equilibrio $P = P'$, sarà $aD = a'D'$, e perciò $a : a' :: D' : D$.

Dunque

726. 1.° Posto $D = 1$; $D' = 14$ (come accade quando i due fluidi sono acqua, e mercurio) se sia $a = 385$ pol. si troverà $a' = 27 \frac{1}{2}$ pol., e posto, che si abbia $a = 385$ pol., $a' = 27 \frac{1}{2}$, fatto $D = 1$, si troverà $D' = 14$.

2.° Si dedurranno i rapporti delle gravità specifiche di diversi fluidi contenuti in vasi o tubi comunicanti da' rapporti delle altezze, cui si sollevano nell' equilibrarsi.

3.° Ciò, che si dice per il caso, che due colonne fluide dotate di diversa gravità specifica si facciano

equilibrio in due tubi comunicanti, vale anche per due colonne, che quantunque abbiano la stessa gravità specifica, sono diversamente premute, o affette da qualche forza. Quella, che è men premuta dovrà per l'equilibrio esser tanto più alta, quanto bisogna, perchè l'aumento della sua altezza produca tal compensazione, che si abbia $P = P^1$.

* 727. Dalla considerazione delle pressioni de' fluidi nasce la dottrina della *stabilità* delle pareti dei recipienti destinati a contenergli.

Riducesi questa dottrina a trovar le condizioni d'equilibrio tra la pressione de' fluidi, che tende a romper le pareti, e la forza, con cui le pareti resistono alla rottura. Noi accenneremo, come possan determinarsi queste condizioni in primo luogo pei condotti, che supponiamo cilindrici, e in secondo luogo pegli argini.

Due sono gli elementi della resistenza n, che i corpi oppongono alla rottura; la grossezza s del corpo resistente, e la tenacità t della materia, di cui è composto; e quindi si trova $n = st$ per un corpo; $n^1 = s^1 t^1$ per un altro.

La pressione P dell'acqua contro una circonferenza orizzontale del raggio r, fatto $D = 1$, è espressa per $P = a \times cir.\ r \times g$ (703); e per un'altra circonferenza del raggio r^1 è espressa per $P^1 = a^1 \times cir.\ r^1 \times g$. Dunque stando fra loro le circonferenze come i raggi, avremo $P : P^1 :: ar : a^1 r^1$. Ma perchè le resistenze dei condotti siano in equilibrio colle pressioni dell'acqua, conviene, che si abbia $P = n = st$; $P^1 = n^1 = s^1 t^1$. Avremo dunque per l'equilibrio $st : s^1 t^1 :: ar : a^1 r^1$; e quindi $s^1 = \frac{a^1 r^1 st}{art^1}$; formula, che indica la grossezza da darsi alle pareti di qualunque recipiente cilindrico dell'ampiezza, o raggio r^1, che debbano esser premute dall'acqua ad un'altezza a^1, sol che sia nota per l'esperienza la grossezza s, e il raggio r d'altro tubo premuto da detto liquido ad una data altezza a, e la ragione della tenacità del materiale del tubo dato a quella del materiale del tubo da costruirsi. Se poi i fluidi prementi fossero di diversa gravità specifica, come per es. acqua, e mercurio, la for-

mula si ridurrebbe $s^1 = \frac{a^1 r^1 st D^1}{art^1 D}$, indicando D la gravità specifica dell' acqua, D^1 quella dell' altro fluido.

Risulta dall' esperienze del Mariotte, che un tubo di piombo di 16 pol. par. di diametro colla grossezza di linee $6 \frac{1}{2}$ ha sostenuto un carico di 50 piedi par. d' acqua. Quindi si deduce, che un tubo dello stesso metallo di 6 pollici di diametro per sostenere un carico di 100 piedi debbe aver le pareti di una grossezza $= 4 \frac{7}{8}$ lin.; poichè $50 \times 16 : 100 \times 6 :: 6 \frac{1}{2} : 4 \frac{7}{8}$.

Parimente l' esperienze del medesimo Mariotte dimostrando, che un tubo di rame di 6 pollici di diametro per sostenere il carico di 30 piedi di acqua debbe avere una mezza linea di grossezza, si troverà, che un simil tubo di 4 pollici di diametro per sostenere una colonna di 50 piedi di mercurio dovrebbe avere nelle pareti una grossezza di $7 \frac{7}{8}$ linee, poichè essendo la gravità specifica dell' acqua a quella del mercurio come $1 : 14$, si ha $30 \times 6 \times 1 : 50 \times 4 \times 14 :: \frac{1}{2} : 7 \frac{7}{8}$.

Deesi notare su questo proposito, che

1.° Le grossezze accennate dal Mariotte non stanno precisamente in equilibrio colla pressione dei fluidi; almeno ciò non si rileva dalla descrizione delle sue esperienze. Ma è sempre bene per la pratica, che la grossezza delle pareti dei recipienti sia maggiore di quel, che sarebbe rigorosamente necessario in teorica.

2.° Siccome la pressione di un fluido varia al variare di a; così le sezioni orizzontali più alte di un lungo condotto verticale son meno premute, che le più basse; resiston perciò avendo anche minor grossezza: e sarebbe una dispendiosa superfluità il dare a tali condotti pareti grosse egualmente per tutta la loro altezza.

Quei, che si dirigono alla pratica troveranno delle notizie molto importanti relative al soggetto, di cui si tratta nell' Opera altrove citata del Navier *Résumé des Leçons données à l' Ecole des ponts et chaussiés*.

* 728. La pressione dell' acqua può tendere a rompere in tre maniere gli argini, che se le oppongono:

1.° Imprimendo a una porzione dell' argine un moto di

rotazione intorno alla linea, che ne limita esteriormente il piano della base. In questo caso l'azione dell'acqua è eguale al momento della pressione orizzontale riferito all'asse di rotazione; o sia al prodotto della pressione orizzontale nella distanza del centro di pressione dall'asse di rotazione.

2.° Imprimendo a una porzione dell'argine un moto progressivo lungo il piano orizzontale della sua base. Questo caso sebben possibile, non ha forse mai luogo in natura, perchè forse non si combinan mai le circostanze necessarie a ridurre nella stessa orizzontale i centri di pressione, e di gravità della massa dell'argine. Ma se il caso si desse, l'acqua agirebbe contro l'argine colla sola pressione orizzontale.

3.° Staccandone degli strati orizzontali: e per distaccarli può agire o col momento della pressione orizzontale riferito alla linea, che limita esteriormente la base d'ogni strato, o colla semplice pressione orizzontale.

Ora perchè l'argine sia stabile, dee resistere alla pressione dell'acqua con una forza eguale, o maggiore. Dunque nel primo caso il momento della resistenza riferito all'asse di rotazione debbe essere eguale, o maggiore del momento della pressione orizzontale; nel secondo la resistenza dee eguagliare, o superare la pressione orizzontale; e nel terzo caso dee o il momento della resistenza, o la semplice resistenza eguagliare, o superare lo sforzo dell'acqua, secondo che ella agisce o col momento della pressione orizzontale, o colla semplice pressione.

La resistenza resulta dalla tenacità della materia, ond'è composto l'argine, dalla sua grossezza, e configurazione, e anche dalla pressione verticale dell'acqua, se l'argine abbia, come suol sempre avere, una *scarpa* interna. Perciò nel calcolo della resistenza debbono entrare le dimensioni dell'argine; e quindi dall'equazione, che si stabilisce per l'equilibrio tra l'azione dell'acqua, e la resistenza dell'argine si può dedurre il valore della larghezza della base, e i rapporti tra i lati dell'argine, che son necessarj per determinare la configurazione più opportuna alla circostanza.

Io non debbo trattenermi su questo soggetto, che inte-

ressa puramente la pratica. Gli Studiosi potranno vederlo ampiamente trattato nell' Architettura Idraulica del Prony, e nell' Opera del Bossut intitolata *Récherches sur la constr. des digues*, ec.

Dell' equilibrio dei solidi immersi nei fluidi.

729. Tutti sanno, che i solidi quando sono immersi nell' acqua si sollevano più facilmente, che quando sono nell' aria. Da ciò si deduce, che i fluidi distruggono una porzione del peso dei solidi, che in loro si immergono; e che questa porzione è maggiore, quando è maggiore la gravità specifica di essi fluidi. Ma le sperienze fatte colla bilancia così detta *idrostatica* han luminosamente confermata, e determinata ancora con rigorosa precisione questa verità.

La fig. 59. rappresenta una bilancia idrostatica. Al centro dei due piatti x, y della bilancia esattissima PQR sono inferiormente attaccati due piccoli uncini, ai quali possono appendersi dei corpi solidi. Sono sottoposti a questi piatti due cilindri di vetro A, B, nei quali può dal vaso più grande O passar dell' acqua, o altro liquido per i canaletti f, g, sol che si girino le chiavi a, o b. Così introducendosi dell' acqua nel vaso B per es. resterà immerso il corpo sospeso al piatto y; e per mezzo di un contrappeso collocato nel piatto x potrà determinarsene il peso mentre che è immerso.

Ora al piatto y sia appeso, per fissar le idee, un cilindretto cavo di rame o, e sotto la base di questo ne sia un altro solido e di rame esso pure, e così fatto, che combaci esattamente, e si possa esattamente contenere nella cavità di quello. Se mentre la bilancia è ridotta all' equilibrio per mezzo di un contrappeso col-

locato nel piatto x, s' introduca dell' acqua nel cilindro B girando la chiave b; appena che il solido c comincia ad immergersi, l' equilibrio della bilancia si rompe, si abbassa il piatto x, e continua ad abbassarsi finchè il solido c sia tutto immerso. Essendo le cose in questo stato, s' introduca a poco a poco dell' acqua nel cilindro cavo o; la bilancia anderà appressandosi successivamente alla situazione orizzontale: e vi si rimetterà stabilmente in equilibrio, tosto che sarà esattamente ripiena d' acqua la capacità di o.

Ora l' equilibrio si è turbato mentre il cilindro c si andava immergendo, perchè il peso ne era diminuito per l' immersione; e quindi per restituir l' equilibrio conveniva aggiugnere al piatto y un peso, che compensasse esattamente, e fosse perciò eguale a quello perduto da c. Ma l' equilibrio si è restituito da un volume di acqua eguale al volume del solido immerso. Dunque il solido immerso ha perduto un peso eguale a quello di un volume d' acqua eguale al suo volume, o sia eguale al volume fluido, che esso discaccia immergendosi.

Questa verità sperimentale può anche dedursi col ragionamento come corollario dei principj sopra stabiliti; e ridotta in espressione algebrica dà delle conseguenze importantissime.

730. Sia una massa fluida in equilibrio in un recipiente scoperto. Qualunque porzione se ne consideri o nella superficie, o nell' interno della massa dee essere in equilibrio, e perciò sottoposta in ogni senso a pressioni, che scambievolmente si distruggano. Un dato volume b, per es. un pollice cubico, della massa fluida si consolidi senza, che se ne alteri la gravità spe-

cifica; l'equilibrio non sarà turbato; e questo volume soffrirà su tutti i punti della sua superficie delle pressioni in ogni senso, che scambievolmente si distruggeranno. Se per tanto in luogo di *b* sia posto un egual volume solido β d'altra materia, che abbia una gravità specifica eguale, questo sarà premuto precisamente come il volume *b*: e per la stessa cagione resterà come quello in un perfetto equilibrio. Ora il volume *b* è spinto dalla gravità verso il fondo del recipiente con una forza eguale al suo peso, e per una direzione, o linea, che dal suo centro di gravità, in cui il detto peso può supporsi riunito, cade normalmente sul fondo; e quindi perchè esso sia in un perfetto equilibrio bisogna, che sia spinto in parte opposta, cioè di basso in alto, e per la direzione medesima da una forza eguale al suo peso: che è quanto dire la risultante delle pressioni, che esso soffre dee eguagliare il suo peso, ed agire di basso in alto secondo la direzione della sua gravità. Dunque il volume β posto in luogo di *b* soffrirà dal fluido ambiente tali pressioni, che la risultante ne sarà eguale al peso del volume *b*, e diretta di basso in alto verticalmente secondo la linea, che passa pel suo centro di gravità; ond'è, che questa risultante vien detta *spinta verticale*. Ora essendo le pressioni su di un corpo immerso proporzionali al volume premuto, varieranno solo al variare di questo, e quando resti costante il volume, non varieranno le pressioni, per quanto varj la massa contenuta sotto al medesimo. Dunque la risultante delle pressioni, o la spinta verticale contro al volume solido β, qualunque ne sia la densità, sarà sempre eguale al peso dell'egual volume fluido *b*. Quindi

731. I. Siccome il volume β non può entrare nel

luogo del volume b senza scacciarnelo, e per mettersi in equilibrio dee soffrire, ed esercitare le pressioni stesse, che soffrirebbe, ed eserciterebbe il volume fluido, che esso discaccia; così può stabilirsi, che

1.° *La spinta verticale d' un fluido contro un solido immerso è sempre eguale al peso del volume fluido discacciato.*

2.° *La direzione di essa come passerebbe pel centro di gravità del volume fluido discacciato, così passerà pel centro di gravità del solido immerso; e può conseguentemente considerarsi come una forza applicata a quel punto.*

3.° *Sarà in equilibrio il solido immerso nel fluido, se il peso del solido è eguale al peso del volume fluido discacciato, e il centro di gravità del solido, e del volume fluido discacciato sono nella stessa verticale.*

732. II. Pertanto il parallelogrammo MNQP (*Fig.* 60) indichi in profilo un solido immerso, ed equilibrato nel fluido AO. Per l' equilibrio è necessario, che la pressione, che sopra di esso solido esercita di basso in alto lo strato fluido sottoposto NC sia eguale alla somma del peso del solido, e della pressione, che su di esso esercita d' alto in basso il fluido superiore AP. Dunque il peso del volume fluido discacciato, e perciò la spinta verticale è eguale alla differenza tra la pressione, che di basso in alto esercita il volume, o strato inferiore NC, e la pressione, che d' alto in basso esercita il volume superiore AP.

733. III. Il peso di un solido immerso in un fluido dee sempre scemare, e scemar tanto, quanto pesa il volume fluido discacciato. Talchè detti P, p i pesi del volume fluido b, e del solido β; g, γ le loro gravità

specifiche, q il peso, che rimane al solido dopo che è immerso, sarà γb la spinta verticale ed avremo; perciò $g\beta - \gamma b = q = p - P$, ovvero, essendo $\beta = b$; $g\beta - \gamma\beta = q$; $g\beta - q = \gamma\beta$ perdita di peso, che il solido soffre per l' immersione. Quindi è chiaro, che

734. 1.° Quanto è maggiore il volume del corpo immerso in un dato fluido, tanto ne è maggiore la perdita di peso. Realmente al piatto y della bilancia idrostatica (*Fig.* 59) sia appeso un cubo di rame, e al piatto x un cubo di piombo d' egual peso, onde la bilancia stia in equilibrio. Il cubo di rame avendo minor gravità specifica, avrà maggior volume, che il cubo di piombo. Ora introducasi al solito l' acqua nei cilindri sottoposti B, A, sì che ambi i cubi vi restino immersi. L' equilibrio della bilancia si romperà, e traboccando il piatto x, si conoscerà, che il cubo di piombo come ha volume minore, così ha perduto meno peso, che il cubo di rame. Per ristabilir l' equilibrio converrà mettere nel piatto y un dato contrappeso. Ora se l' esperienza si ripeta con cubi sempre equiponderanti, ma di dimensioni respettivamente diverse, bisognerà mettere nel piatto y dei contrappesi tanto maggiori, quanto maggiore sarà il volume del cubo appesovi; lo che dimostra, che la perdita di peso è proporzionale al volume del solido immerso.

Dunque generalmente quando due corpi di diversa gravità specifica sono in equilibrio sopra una bilancia nell' aria, sono in realtà diversamente pesi, poichè il diverso loro volume fa, che soffrano una diversa spinta verticale dall' aria; e perciò perdano diverso peso. Così se siano in equilibrio 1000 grani di piombo con 1000 grani di sughero, il sughero peserà più del piom-

bo; e si trova, che la differanza è di 4 grani in circa. Per lo che quando si pesano i corpi nell' aria, se si voglia molta esattezza, bisogna servirsi di contrappesi di gravità specifica o eguale, o poco diversa.

735 2.° Data la gravità specifica del fluido, e la perdita di peso del solido per l'immersione, si ha il volume β dall' equazione $g\beta - q \ (= \pi) = \gamma\beta$, che dà $\beta = \frac{\pi}{\gamma}$.

3.° Se si moltiplichi per g l'equazione $g\beta - q = \gamma\beta$, ne ricaveremo l'analogia $g : \gamma :: g\beta : g\beta - q$. Dunque *la gravità specifica del solido immerso è a quella del fluido, come il peso del solido immerso è alla perdita di peso sofferta pell' immersione*: teorema, che serve di fonadmento ad un metodo per determinare la gravità specifica dei solidi. Poichè presa per unità la gravità specifica dell' acqua distillata, e supposto, che in essa sia immerso il solido; la proporzione precedente diviene $g : 1 :: g\beta : g\beta - q$; dalla quale si rileva, che $g = \frac{g\beta}{g\beta - q}$; cioè che *la gravità specifica di un solido si ottiene dividendo il suo peso assoluto per la perdita di peso, che soffre nell' acqua stillata*.

736. 4.° Se lo stesso volume solido β s' immerga in due diversi fluidi, avremo due diverse perdite di peso; e quindi $g\beta - q : g\beta - q' :: \gamma\beta :: \gamma'\beta$; ovvero $\gamma : \gamma' :: g\beta - q : g\beta - q'$; cioè *le gravità specifiche di due diversi fluidi sono come le diverse perdite di peso, che soffre un corpo in essi immerso*; teorema, che serve di fondamento ad un metodo per determinare le gravità specifiche de' fluidi. Sotto il piatto y della bilancia idrostatica appendasi con una catenella un

solido di dato volume, e riducasi all' equilibrio coll' opportuno contrappeso posto nell' altro piatto x. Quindi introdotto nel cilindro sottoposto B tanto fluido, che il solido ci resti immerso a qualche profondità, si turberà l' equilibrio traboccando il piatto x; e per ristabilirlo converrà mettere nel piatto y un certo peso. Ripetendo l' esperienza stessa con varj fluidi, bisogneranno per restituir l' equilibrio diversi pesi: e i rapporti di questi pesi daranno per l' enunciato teorema i rapporti delle gravità specifiche dei fluidi, per cui sono usati.

737. 5.° Se nello stesso fluido s' immergano due diversi volumi solidi β, β', avremo due equazioni $g\beta - q = \gamma\beta$, $g'\beta' - q' = \gamma\beta'$; onde $g\beta - q : g'\beta' - q' :: \gamma\beta : \gamma\beta' :: \beta : \beta'$; e se sia $g\beta - q = g'\beta' - q'$, sarà $\gamma\beta = \gamma\beta'$; ovvero $\beta = \beta'$; cioè *due corpi immersi in un fluido stesso hanno i volumi proporzionali alle respettive perdite di peso; onde se siano eguali le perdite, saranno eguali i volumi; e viceversa se abbiano eguali volumi, perderanno eguali quantità di peso*.

738. Su questo principio idrostatico si fondò Archimede nella soluzione del famoso problema della corona, che si riduce a determinare, se una corona sia di puro oro senza guastarla. Essendo di puro oro, dovea la corona immersa nell' acqua diminuir di peso tanto, quanto per l' immersione nella stessa acqua diminuiva il peso di una verga di puro oro egualmente pesa; giacchè nei corpi omogenei i volumi son come i pesi.

739. IV. La gravità specifica di un solido può essere eguale, maggiore, o minore di quella d' un fluido, entro cui sia immerso. La spinta verticale eguale co-

stantemente al peso del volume fluido discacciato nel primo caso distrugge esattamente il peso del solido, che rimane perciò immobile, ovunque si trovi nel fluido; nel secondo ne distrugge solo una porzione eguale a se; e il solido scende spinto da una forza eguale al peso residuo; seppure questa forza non venga distrutta dall' opposizione, che i fluidi presentan sempre ai solidi, che gli traversano (477): opposizione, che a circostanze pari è proporzionale alla superficie normale alla linea del moto. Nel terzo caso, la spinta verticale maggiore del peso del solido lo spinge in alto, finchè esca dal fluido tanta porzione del volume di esso, quanta si esige perchè il peso del volume fluido discacciato (il quale diminuisce a proporzione, che il solido emerge) si riduca eguale al peso del solido, e si abbia perciò equilibrio tra esso, e la spinta verticale.

740. Ma perchè si producano questi effetti bisogna, che possano liberamente esercitarsi le pressioni, dalla cui differenza risulta la spinta verticale (732). Se accada, che manchi sopra di un solido la pressione di basso in alto, come per es. se una tavola ben piallata sia collocata sul fondo liscio d' un recipiente, che poi venga pieno d'acqua; per quanto la gravità del solido sia minore di quella del fluido, il solido non può salire. Può parimente accadere, che non scenda un corpo più grave specificamente del fluido, in cui s' immerge, se con qualche artifizio s'impedisca al fluido di premerlo d' alto in basso. Così nell' esperimento descritto sopra (790) introdotto il cilindro collo stantufo ad una certa profondità nell' acqua, lo stantufo, per quanto specificamente più grave dell' acqua, non scende, perchè non soffre dal liquido pressione alcuna d' alto in basso.

741. Del resto un solido spinto così in alto dalla maggior gravità specifica d' un fluido, in cui è immerso in modo da emergerne in parte, dicesi *galleggiante*.

La dottrina dei galleggianti è sì interessante, che non possiamo dispensarci dall' esporne sommariamente i teoremi principali. Questi deduconsi tutti dal fatto fondamentale accennato qui sopra (739), che i galleggianti ridotti in equilibrio restano immersi nel fluido, su cui galleggiano, tanto da discacciarne un volume, che pesi quanto essi pesano. Sulla verità di questo fatto non può nascer dubbio, essendo facilissimo di dimostrarlo colle sperienze più semplici, e decisive. Per es. in un vaso mezzo pieno d' acqua immergasi un cilindretto di cera. Questo galleggerà, e l' acqua s' inalzerà nel vaso alquanto sopra il livello primitivo. Notisi l'altezza, cui giugne, tosto che il galleggiante si sia messo in equilibrio; e si pesi il vaso coll' acqua, e col cilindro. Estratto quindi il cilindro, e abbassatasi perciò l' acqua nel vaso, vi se ne infonda della nuova, finchè giunga all' altezza notata, cui la faceva sollevare il cilindro galleggiante. È chiaro, che ne bisognerà tanta, quanta precisamente ne discacciava il volume immerso di esso cilindro. Ora se si ripesi il vaso dopo di avervi aggiunto quest' acqua, si troverà, che pesa precisamente quanto pesava avanti, quando vi era immerso il cilindro: e quindi apparisce, che questo pesa, quanto l' acqua nuovamente infusa, o sia quanto l' acqua, che era da esso discacciata.

742. Stabilito il fatto con queste, ed altre simili sperienze, per tradurlo in equazione dicasi V il volume totale del galleggiante, v la porzione, che resta immersa nel fluido, onde il peso del galleggiante sia

gV; γv il peso del volume fluido discacciato (49); avremo per l' equilibrio de' galleggianti $gV = \gamma v$, e quindi

743. I. Il volume della porzione immersa del galleggiante sarà $v = \frac{gV}{\gamma}$. Date per tanto l' altezza a di un prisma galleggiante, la base b, e le gravità specifiche g, γ, se sia x l' altezza del volume immerso, avremo $v = bx = \frac{gV}{\gamma} = \frac{abg}{\gamma}$; onde $x = \frac{ag}{\gamma}$; e quindi $a - x = a - \frac{ag}{\gamma}$. Si noti per altro, 1.° che l'equazione $v = \frac{gV}{\gamma}$ non è rigorosamente vera, che nel vuoto. Se siano nell' aria il fluido, e il galleggiante, i loro volumi scacceranno un volume d' aria, e perciò soffriranno dall' aria una spinta verticale, che produrrà una diminuzione di peso proporzionale al diverso respettivo volume, come resulta da ciò, che dicemmo sopra (734). 2.° Se il fluido, su cui sta il galleggiante è di tal natura, che debba o deprimersi, o sollevarsi attorno al medesimo, la diminuzione di peso del galleggiante eguaglia il peso di un volume fluido eguale a quello del volume solido immerso, più, o meno il peso del volume fluido depresso, o sollevato (V. *Bibl. Britann. T.* 34 *p.* 29).

744. II. Dall' equazione $gV = \gamma v$ si ha $v : V :: g : \gamma$; cioè il volume della parte immersa sta al volume totale, come la gravità specifica del galleggiante a quella del fluido. Perciò diminuendosi la gravità specifica del galleggiante, si diminuirà corrispondentemente la parte immersa.

745. Due utili applicazioni di questo teorema si fan-

no nella pratica. La prima è il metodo di staccare dal fondo del mare, e dei fiumi dei gran pesi, attaccando loro un forte battello moltissimo carico, e quindi diminuendone moltissimo la gravità specifica con iscaricarlo. La seconda è il metodo di determinare la gravità specifica dei diversi solidi per mezzo della diversa quantità del loro volume, che resta immersa in un dato fluido.

746. III. Se il medesimo galleggiante sia immerso successivamente in due diversi fluidi, che abbiano le gravità specifiche γ, γ', avremo due equazioni $gV = \gamma v$; $gV = \gamma' v'$; onde $\gamma v = \gamma' v'$; e quindi $\gamma : \gamma' :: v' : v$, cioè le gravità specifiche di due diversi fluidi stanno fra loro in ragione inversa dei volumi, o parti immerse in essi d' uno stesso galleggiante. Dal che si deduce il metodo più usitato per determinare la diversa gravità specifica dei fluidi.

747. Adoprasi a tale oggetto una semplice macchinetta conosciuta sotto il nome d' *Idrometro*, o anche di *areometro*, o misuratore della leggerezza. Una delle più comunemente usitate è composta di un cilindro di vetro DH (*Fig.* 61) terminato inferiormente con due globi B, C; il superiore B più ampio, e vuoto, onde ella possa galleggiare in un fluido anche assai leggero; l' inferiore C più piccolo, pieno di pallini di piombo, o di mercurio, onde ella immergasi anche in un fluido assai grave, e mantengasi verticale. Il cilindro è graduato, e la graduazione, o la scala è spesso limitata dal punto, fino al quale s' insinua lo strumento nell' acqua stillata, e che si prende per lo zero, e dal punto, cui si arresta nell' acqua marina. Posson usarsi anche altri liquidi per determinare i limiti di questa graduazione, specialmente ove si voglia una scala assai lunga;

e solo è necessario, che sia noto quai liquidi si son usati, in quanti gradi è divisa la scala, e quali sono le precise dimensioni di tutte le parti dello strumento; onde possano intendersi con precisione i risultati delle sperienze, che con esso sono istituite. Insinuando pertanto lo strumento successivamente in diversi fluidi, dalle diverse profondità, cui si abbassa per equilibrarvisi, si rileveranno con facil calcolo le loro diverse gravità specifiche.

Siano H, e T, ovvero 1, e 66 i punti, cui si affonda l' Idrometro in due fluidi, per es. nel mercurio, e nell' acqua. Sia gV il peso costante dell' Idrometro. Dette γ, γ' le gravità dei due fluidi; v il volume immerso nel primo, v' il volume immerso nel secondo; avremo come sopra $gV = \gamma v$ per il primo, e per il secondo $gV = \gamma' v'$, onde $\gamma v = \gamma' v'$, e perciò $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{v}{v'}$. Ora facilmente si calcolano nella seguente maniera i volumi v, v'. Sia $a^2\pi$ la base del cilindro TH, r il raggio del globo maggiore B, r' quello del minore C; talchè sia il volume del primo $= \frac{4}{3} r^3\pi$; del secondo $\frac{4}{3} r'^3\pi$; e il volume d' entrambi $\frac{4}{3} \pi \times (r^3 + r'^3)$. Riducasi questo volume ad un cilindro della base $a^2\pi$ (per renderlo omogeneo al volume TH) e dell' altezza z. Avremo $a^2\pi z = \frac{4}{3} \pi (r^3 + r'^3)$, onde $z = \frac{4}{3a^2} (r^3 + r'^3)$; talchè se le dimensioni delle diverse parti della macchina diano $a = \frac{1}{3}$; $r = \frac{2}{3}$; $r' = \frac{1}{3}$; sarà $z = 4$. Ora il volume immerso nel primo fluido è la somma del volume cilindrico H $1 = 1$, e del volume dei due globi ridotto cilindrico, cioè

$$a^2\pi (z + 1) = a^2\pi (4 + 1) = 5a^2\pi = v;$$

e il volume immerso nel secondo è il volume dei glo-

bi più il volume HT $= 66$, cioè $a^2\pi\ (4 + 66) = 70\, a^2\pi = v^1$. Dunque $\frac{v}{v^1} = \frac{\gamma^1}{\gamma} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$; onde $\gamma^1 = 1; \gamma = 14$.

748. Questo strumento può costruirsi, graduarsi, ed usarsi anche in un modo alquanto diverso da quello, che abbiam descritto. Spesso sulla sommità del cilindro si adatta un piattellino D, e si segna sul medesimo cilindro il punto, fino al quale lo strumento s' insinua per il suo proprio peso in un liquido dei più leggieri, per es. nell' etere solforico. Se immergendolo in un altro liquido, lo strumento non vi si affonda fino a quel segno, si pongono nel piattellino dei pesi, che ve lo spingano, cioè che lo facciano insinuare a quella profondità precisamente, onde il volume immerso sia costante in ogni esperienza. È chiaro, che ne' diversi liquidi si esigeranno per ciò diversi pesi. Ora ridotto così lo strumento all' equilibrio, il suo intero peso è eguale al peso del volume liquido discacciato (742); e questo volume è eguale al volume immerso dello strumento. E poichè la gravità specifica è eguale al peso diviso per il volume (52); se in ogni esperienza il peso intero dello strumento, che è quanto dire il peso del volume liquido discacciato, si divida per il valor costante di esso volume calcolato come abbiamo fatto di sopra (747), avremo i valori della gravità specifica dei liquidi individualmente esaminati, e dal rapporto di questi valori quello delle loro gravità specifiche. Il Biot poi (*Précis élém. de Phys. T.* 1 *p.* 287) accenna con quale artifizio possa farsi la graduazione all' oggetto di semplicizzare i calcoli; e nota le avvertenze, che debbono aversi per

evitare ogni errore tanto nel far l' esperienze quanto nel calcolarne i resultati.

749. Diverse modificazioni di questo strumento sono state immaginate dai Fisici, tra le quali merita di esser particolarmente conosciuta quella, con cui il Nicholson lo ha ridotto capace di determinare i rapporti della gravità specifica dei solidi a quella di un liquido, che ordinariamente suole esser l' acqua. L' areometro così modificato suol farsi o di latta, o di ottone, ed è rappresentato dalla fig. 62. All' estremità R del corpo dell' areometro è attaccata una secchiolina S tutta traforata, e dalla parte inferiore della medesima pende il globetto C pieno di piombo, o di mercurio. S' immerge questo strumento in un vaso d' acqua stillata a una determinata temperatura, e per mezzo di un peso collocato nel piattellino D si obbliga ad insinuarvisi fino al punto fisso T segnato sul suo collo. Poniamo, che bisogni perciò un peso di 1000 grani.

Ora tolto questo peso dal piattellino, ci si ponga il solido A, di cui vuolsi scoprire la gravità specifica, e che si suppone pesar meno di 1000 grani (se pesasse più, bisognerebbe servirsi d' altro areometro). Sarà necessario aggiugnere un certo peso, per esempio n grani, onde obbligar l' areometro ad abbassarsi fino in T. È chiaro, che la differenza tra questo peso aggiunto, e 1000 grani sarà il peso del solido A nell' aria, che sarà perciò $= 1000 - n$ grani. Ciò fatto, si porti questo solido dal piattello nella secchiolina, e nuovamente immergasi lo strumento nell' acqua alla stessa temperatura. Il solido perderà per l' immersione una parte del suo peso; e perchè l' areometro si affondi fino in T, sarà d' uopo compensar questa perdita, accrescendo il peso nel piattello, sicchè riducasi per esempio n' grani.

In tal caso il peso del solido nell' acqua sarà 1000 — n' grani. Sottraendo pertanto questo peso da quello del solido stesso nell' aria, avremo la perdita di peso sofferta dal solido per l' immersione nell' acqua espressa per $n' - n$ grani. Ora a questa perdita è eguale il peso del volume fluido discacciato (733). Dunque un volume d' acqua eguale al volume del solido A pesa nell' aria $n' - n$ grani; e quindi il rapporto del peso $1000 - n$ al peso $n' - n$; o sia la frazione $\frac{1000 - n}{n' - n}$ darà il rapporto della gravità specifica del solido a quella dell' acqua.

Gli Studiosi potranno vedere nelle Opere dei Chimici, come Guyton, Beaumé, ed altri abbian modificato l' areometro per ridurlo atto all' esame dei sali, degli acidi, ec.; nè trascureranno di esaminare il lavoro non meno interessante per le Scienze, che pel commercio fatto recentemente sull' areometro dal Sig. Delezenne (*Jour. de Phys. T.* 94 *p.* 204). e l' *istruzione per l' uso dell'* alcoometro *centesimale*, pubblicata dal Gay Lussac nel 1824, non dovendo Noi ulteriormente trattenerci su questo soggetto.

* 750. IV. Tosto che il galleggiante sia emerso tanto, che si abbia l' equazione $gV = \gamma v$, dee cessare in esso ogni moto verticale. Ma perchè sia in equilibrio conviene, che non abbia nemmeno movimento alcuno di rotazione. Ora ciò non può essere, se la direzione della spinta verticale non passi pel centro di gravità dell' intero galleggiante; poichè fuori di questo caso il peso non essendone distrutto da alcuna forza opposta, dee far descrivere al centro di gravità un arco d' alto in basso (243). Ma la spinta verticale dee anche passare per il centro di gravità del volume immerso (731). Dunque il centro di gravità del volume immerso, e del galleggiante debbono trovarsi nella stessa verticale. Per lo che due sono le condizioni necessarie

per l' equilibrio dei galleggianti; che si verifichi l' equazione $gV = \gamma v$, e che i centri di gravità del galleggiante, e della parte immersa siano nella stessa verticale.

* 751. La special figura fa, che varie siano anche per un medesimo galleggiante le posizioni, in cui queste due condizioni avverandosi, possa aversi equilibrio. Nel cap. 13 dell' Idrostatica del Bossut, e nel cap. 4 del libro 4 della Mecc. del Poisson si determinano queste posizioni d' equilibrio per galleggianti di diversa figura.

Ma sebbene tali posizioni producan tutte l' equilibrio, non tutte procurano al galleggiante un egual grado di consistenza, e stabilità. Disturbato un galleggiante dall' equilibrio talvolta vi si ristabilisce con maggiore, o minor facilità; talvolta si rovescia. Per comprendere quando debba accadere l'una, quando l' altra di queste cose, sarà opportuno di fare le seguenti osservazioni.

* 752. Un galleggiante, che noi rappresentiamo per la figura MKN (*Fig.* 63), emerso dal fluido quanto conviene è contemporaneamente affetto da due eguali, ed opposte forze, cioè dalla propria gravità, e dalla spinta verticale del fluido, in cui nota. Se queste forze agiscono nella direzione stessa, cioè se il centro G di gravità del galleggiante, e quello F del volume fluido discacciato, o sia della parte immersa sono nella stessa verticale, l' effetto dell' una è pienamente distrutto dall' effetto dell'altra, e si ha un perfetto equilibrio. Ma se per qualche cagione inclinandosi la figura, il centro F si trasporti in F', mentre sta fisso il centro G di gravità; e perciò la direzione della spinta verticale non passi più per questo centro; dee immediatamente eccitarsi nel galleggiante un moto di rotazione intorno al medesimo (407). Questo moto è prodotto dalla spinta verticale S, la cui nuova direzione F'g sempre normale al livello del fluido passando costantemente pel centro di gravità del volume fluido discacciato, o della parte immersa, si allontana nel senso dell' inclinazione dal centro di gravità del galleggiante, e fa un angolo F'gG colla linea, che nella posizione d' equilibrio univa i due centri G, F. Ora se questi centri siano situati in modo, che la spinta verticale agendo per es. secondo F'g, si opponga al moto, con cui la figura

s' inclina rotando intorno a G ; la figura per l'azione di S ritorna alla posizione d' equilibrio, ha perciò stabilità; e il momento di S riferito al centro G dicesi propriamente la *stabilità del galleggiante*. Ma se la spinta verticale per la situazione di F relativamente a G agendo per es. secondo la direzione F'' g', anzi che contrariare il moto, con cui la figura s' inclina rotando intorno a G, lo favorisca; la figura manca di stabilità, e si rovescia.

Potrebbe facilmente dedursi dai principj, che abbiamo esposti, la dottrina completa della stabilità dei galleggianti; ma noi ci contenteremo di riferirne semplicemente i seguenti resultati.

* 753. I. Se il centro G di gravità del galleggiante sarà più basso del centro F di gravità della parte immersa, il galleggiante avrà una stabilità tanto maggiore, quanto maggiormente saranno tra loro discosti i due centri.

* 754. II. Se il centro di gravità del galleggiante sarà più alto di quello della parte immersa, 1.° il galleggiante avrà della stabilità, quando il quoziente del cubo della linea AB $= q$, che separa la parte immersa dall' emersa (detta dai Francesi *ligne de flottaison*) diviso per 12 è maggiore del prodotto dell' area immersa AKB $= b^2$ per la distanza h, che passa tra' due centri di gravità; cioè quando $\frac{1}{12} q^3 > b^2 h$, e tanto più, quanto il primo termine sarà maggior del secondo.

2.° Non avrà stabilità, quando sia $\frac{1}{12} q^3 = hb^2$; oppure $h = \frac{q^3}{12 b^2}$.

3.° Dovrà ad ogni piccolo urto rovesciarsi, se sia $\frac{1}{12} q^3 < h b^2$.

* 755. Per lo che la maggiore altezza, cui possa situarsi il centro di gravità del galleggiante al di sopra di quello della parte immersa, è limitata dall' equazione $h = \frac{q^3}{12 b^2}$, se si voglia dare stabilità al galleggiante. Ora siccome quando si verifica questa equazione, essendo nulla la stabilità, il momento della spinta verticale diventa $= 0$; dee diventare $= 0$ anche la distanza tra la direzione di essa spinta, e il centro di gravità del galleggiante; onde questo centro dee

cadere sul punto g. Dunque perchè il galleggiante abbia della stabilità conviene, che il centro di gravità ne sia sempre al disotto del punto g. Questo punto nell' Architettura navale è detto *Metacentro*; e al disotto di esso dee cadere il centro di gravità del vascello caricato, perchè questo possa avere della stabilità.

La dimostrazione di questi resultati, e molte altre importanti cose relative alla stabilità dei galleggianti potran vedersi nel Cap. 14 dell' Idrostatica del Bossut, dove si trovan citati tutti gli Autori, che meglio han trattata questa materia.

Macchine Idrostatiche.

756. Chiamansi *idrostatiche* quelle macchine, i cui effetti dipendono dalle leggi dell' Idrostatica. Tra queste le più importanti sono il Barometro, e le Trombe, che si usano per sollevar l' acqua.

Il Barometro macchina così detta, perchè destinata a misurare il peso dell' atmosfera, o la pressione, che questo peso esercita su qualunque punto presso la superficie della Terra, non è che un tubo di cristallo perfettameute vuoto, dentro del quale la pressione dell' aria sostiene in equilibrio una colonna di mercurio ad una certa altezza, lasciando al di sopra uno spazio pur vuoto perfettamente, che dal nome del Torricelli inventore di questa macchina si dice *vuoto torricelliano*. Come la teorica di essa si appoggia principalmente sulle proprietà dell' aria, così noi la riserbiamo al trattato particolare, che daremo in seguito di qnesto fluido. Qui ci contenteremo di notare, che il barometro mostra, che il peso di una colonna atmosferica al livello del mare fa equilibrio, e perciò eguaglia il peso di una colonna di mercurio di egual base,

che abbia l' altezza di circa 28 pol. fr.; o in altri termini, che la pressione di una colonna d' aria alta quanto l' atmosfera tiene elevato il mercurio dentro un cilindro d' egual base perfettamente vuoto fino all' altezza di circa 28 pol., e mostra pure, che questa pressione è soggetta a variazioni frequenti, e notabili.

757. Di tre specie sono le Trombe, *Aspiranti; Prementi; Aspiranti insieme e prementi*. La Tromba aspirante è composta di due tubi metallici, l'uno AN (*Fig.* 64) detto *corpo della tromba* ordinariamente più ampio dell' altro NT detto *tubo d' aspirazione*. Questo ha la sua estremità inferiore nell' acqua XY, é la superiore unita all' altro tubo per mezzo del piano metallico MN, nel quale è una animella O, che si apre solo di basso in alto. Questa può anche essere in TV, cioè nel piano di livello dell' acqua, ma noi la supponiamo nel piano MN, dove ordinariamente suol mettersi. Nel corpo della tromba è insinuato lo stantufo GHI guarnito di un' animella, che si apre anche essa di basso in alto. Combacia questo esattamente colle pareti in modo, che impedisce l' accesso dell' aria esterna; ma può pell' azione della leva CE sollevarsi alternativamente, ed abbassarsi, percorrendo un determinato spazio HL tale, che LN sia minore di NV.

Allorquando lo stantufo da HI passa in KL l' aria atmosferica contenuta in MI si dilata, riducendosi ad occupar lo spazio ML; e quindi diminuisce la sua pressione (724) contro l' animella O: perlochè l'aria più densa contenuta in TN coll' eccesso della sua pressione l' apre, e penetrando nello spazio ML, si riduce tutta l' aria contenuta in TL densa egualmente, ma meno densa, che l' aria esterna; la quale perciò preme l' a-

cqua con maggior forza, e l' obbliga a sollevarsi dentro del tubo fino ad una altezza RS tale, che il peso del cilindro aqueo sollevato nel tubo insieme con la pressione dell' aria rarefatta in RL, faccia equilibrio alla sua pressione. Mentre poi lo stantufo deprimendosi ritorna alla situazione primitiva, l' aria contenuta in ML soffre una compressione, per cui chiude l' animella O, ed apre la G, onde ella può escire liberamente. Rialzandosi nuovamente lo stantufo, per la stessa ragione, e nella stessa guisa si rarefà l' aria del tubo TN, e perciò si solleva più alto in PQ l' acqua, che dopo un certo numero di tali moti penetra per la animella O nello spazio ML. Introdotta l' acqua in questo spazio soffre dallo stantufo l' azione stessa, che prima soffriva l' aria; come essa apre, ed oltrepassa l' animella G, e giugne finalmente allo sfogo F, per cui si versa.

758. È chiaro pertanto, che in questa tromba l' elevazione dell' acqua dipende dalla pressione delle colonne atmosferiche sulla superficie XY della medesima. Dunque 1.° siccome sappiamo dall' esperienza, che queste colonne fanno equilibrio a colonne d' acqua di 32 piedi, ovvero 10, 4 metri d' altezza, e d' egual base (si suppone la tromba situata a livello del mare); così l' acqua colla tromba aspirante non si può sollevare, che a circa 32 piedi. Per lo che il tubo d' aspirazione non può aver altezza maggiore; sarà anzi opportuno, che l' abbia alquanto minore.

759. Dunque 2.° tanto più sollecitamente l' acqua dee alzarsi nella tromba aspirante, quanto più sollecitamente questa si vuota d' aria. Ora ciò segue tanto più sollecitamente, quanto è minore la quantità d' aria, che ella contiene, e quanto è maggiore il vuoto, che

si genera per ogni elevazione dello stantufo. Dunque tanto più solleciti sono gl' inalzamenti dell' acqua, quanto maggiore è il tratto HK, per cui si muove lo stantufo; quanto è maggiore il rapporto del diametro del corpo della tromba a quello del tubo d' aspirazione; e quanto è minore l' altezza di questo tubo, e la sua distanza MH dallo stantufo depresso.

* 760. Ciò premesso, egli è evidente, che ad ogni colpo di stantufo, cioè ogni volta, che lo stantufo è arrivato in KL, tre forze si fanno equilibrio in questa tromba; la pressione dell' aria atmosferica, quella dell' aria rarefatta contenuta nello spazio TN + ML, e il peso del cilindro aqueo TS sollevato nel tubo d' aspirazione. Ora ponendo $q =$ 32 piedi, e dicendo g la gravità specifica dell' acqua, b la base del tubo d' aspirazione, la pressione dell' atmosfera, come quella, che tiene in equilibrio una colonna d' acqua dell' altezza di 32 pi. si potrà esprimere per bgq. Detta x l'altezza TR, la pressione dell'aria rarefatta sarà $bg\ (q - x) = bgz$, facendo $z = q - x$; e il peso, o la pressione del cilindro aqueo TS sarà bgx; onde per l'equilibrio dopo il primo colpo dello stantufo avremo $bgq = bgx + bgz$; $q = x + z$.

Avanti l' elevazione dello stantufo; la massa d' aria contenuta nel tubo d' aspirazione TN siccome era d' egual densità dell' atmosferica, così esercitava una pressione $= bgq$; dopo l' elevazione dello stantufo essendo la detta massa di aria diffusa in un maggior volume SK, la pressione è divenuta bgz. Ma le pressioni d' una stessa massa di aria sono reciproche ai volumi (724). Dunque avremo $bgq : bgz ::$ SK : TN; $z = \frac{q.\ TN}{SK}$; cioè detto r il raggio del tubo d' aspirazione, R quello del corpo della tromba, a l' altezza del tubo d' aspirazione, a' lo spazio HK, che si descrive dallo stantufo, d la minima distanza HM dello stantufo depresso dal tubo d' aspirazione, fatto $a' + d =$ KM $= n$; e posta $1 : \pi$ la ragione del diametro alla periferia $z = \frac{q \times \pi a r^2}{\pi n R^2 + \pi r^2 (a - x)}$. Dunque $q = x + z = x +$

$\frac{a q r^2}{nR^2 + r^2 (a - x)}$; e quindi, fatto per comodo $\frac{R^2}{r^2} = k$;
$h = q + a + k n$;

(1) $x = \frac{1}{2} [h \pm \sqrt{ (h^2 - 4 q k n) }]$. Perciò

(2) $z = q - x = \frac{1}{2} [2q - h \pm \sqrt{ (h^2 - 4q k n) }]$;

nelle quali equazioni convien prendere il segno inferiore pei radicali, giacchè tanto x, quanto z debbono essere minori di q, e ciò non potrebbe essere prendendo i segni superiori.

* 761. Precisamente nella stessa maniera potrà trovarsi la condizione dell' equilibrio tra le pressioni dell' atmosfera, del cilindro aqueo TQ, e dell' aria rarefatta contenuta in QK dopo il secondo colpo dello stantufo. Detta x' l' altezza TP; $q - x' = z'$, avremo al solito $q = x' + z'$. E col medesimo ragionamento troveremo $bgz : bgz' :: \text{QK}$, SM; $z' = \frac{z.\,\text{SM}}{\text{QK}} = \frac{z \pi r^2 (a - x)}{\pi R^2 n + \pi r^2 (a - x')} = \frac{z (a - x)}{kn + (a - x')}$.

Quindi $q = x' + \frac{z (a - x)}{kn + a - x'} = x' + \frac{(q - x) (a - x)}{kn + a - x'}$; e finalmente

$$(3)\ x' = \frac{h - \sqrt{[h^2 - 4 q k n - 4 x (q + a - x)]}}{2}$$

equazione, in cui abbiamo dato al radicale il segno, che li conviene (760).

* 762. Collo stesso metodo potremmo determinare x'', z'', ec. per il terzo, e per quanti si vogliono colpi di stantufo; ma senza diffonderci in ciò, dedurremo piuttosto alcune importanti conseguenze dalle formule trovate.

1.° Si avrà equilibrio, e l' acqua si arresterà, se i valori di x, x', x'', ec. saranno reali; onde perchè l' acqua continui a salire, bisogna, che questi valori siano immaginarj. Così l' acqua si arresterà dopo il primo colpo di stantufo, se non sia $h^2 < 4qKn$.

2.° La massa dell' acqua, che ad ogni colpo di stantufo si solleva nel tubo d' aspirazione, sarà data dal prodotto dei trovati valori di x, x', ec. per la base πr^2 del tubo.

* 763. 3.° Se nell' equazione prima (760) faremo $x = a$, e la risolveremo per rapporto ad a, conosceremo la lunghez-

ta da darsi al tubo d' aspirazione TN, perchè al primo colpo di stantufo riempiasi tutto d' acqua.

* 764. Sia l' acqua arrivata in DF; cioè cominci a sgorgare. In tal caso la forza f per sollevar lo stantufo dee vincere una resistenza risultante dal peso dello stantufo, dal peso del cilindro aqueo HF, che li sta sopra, e dal peso dell' atmosfera; ma è coadiuvata in tal azione dallo sforzo, che esercita di basso in alto il cilindro aqueo TI. Dunque si avrà equilibrio, quando la resistenza eguagli la somma di f, e dello sforzo del cilindro aqueo TI. Detta per tanto b' la base dello stantufo, c l' altezza HD, avremo la pressione del cilindro aqueo HF espressa per $b'cg$, e lo sforzo del cilindro aqueo TI eguale alla pressione dell' atmosfera sull' acqua, meno il peso del cilindro stesso; cioè $bgq - bg \times (a + d)$. Talchè detto p il peso dello stantufo, la resistenza sarà $p + b'cg + bgq$; e perciò in caso d' equilibrio sarà $f = p + b'cg + bgq - bgq + bg\ (a + d) = p + b'cg + bg\ (a + d)$. Dovendosi poi aumentar la forza di $\frac{1}{3}$ di se stessa, perchè dall' equilibrio si passi al moto (678), avremo pel caso del moto $f = \frac{4}{3}\ [\ p + b'cg + bg \times (a + d)\ ]$.

765. La Tromba premente non è, che l' aspirante rovesciata. Il tubo BCAK (*Fig.* 65) sia immerso nell' acqua, e sia dentro il medesimo lo stantufo YHI, che fermato per mezzo della verga ZY allo strumento abcdmn possa alternativamente alzarsi, ed abbassarsi per l' azione della leva gL. Abbia questo stantufo una animella F, che si apra di basso in alto. Nel piano metallico orizzontale VP bastantemente grosso, e saldato alle pareti del tubo sia un' altra simile animella E, che si apra parimente di basso in alto. Tale è la costruzione della tromba premente. Ora quando lo stantufo si abbassa l' acqua s'insinua al di sopra di esso nel tubo per l'animella F; e quando torna ad alzarsi, quest' acqua serra la detta animella F, e a traverso del

foro E vien spinta sopra il piano VP, dove si arresta, chiudendono l'animella colla sua gravità. Se lo stantufo torna nuovamente a deprimersi, una nuova quantità d'acqua s'insinua al di sopra di esso, ed è costretta per la successiva elevazione a sorpassare il piano VP. Così va successivamente sollevandosi l'acqua nel tubo VO, e tanto maggiormente, quanto maggior numero di volte si alterna l'abbassamento, e l'elevazione dello stantufo. È chiaro dunque, che l'acqua nella tromba premente può elevarsi ad un'altezza quanto si vuole superiore a 32 piedi, giacchè non ne dipende l'inalzamento dalla gravità dell'aria, ma dalla sola azione della potenza, che muove lo stantufo, la quale debbe esser capace di vincere una resistenza eguale al peso dello stantufo, e del cilindro aqueo sovrastante al medesimo.

766. La Tromba aspirante insieme, e premente risulta dalla combinazione delle due descritte trombe.

Nella parete del corpo della tromba ABMN(*Fig.* 66) poco sopra all'unione di esso col tubo d'aspirazione MV apresi un tubo ricurvo GPRL serrato da una animella E, che va di dentro in fuori, cioè da P verso L. Lo stantufo IH non è forato; e quindi colla sua azione spinge l'aria contenuta nel tubo d'aspirazione fuori della tromba pel tubo GZ, come pel suo foro la spinge fuori dall'aspirante. Vuotato d'aria il tubo d'aspirazione, penetra nel corpo della tromba l'acqua, che per la pressione dello stantufo abbassato è forzata a passare per l'animella E nel tubo GZ, in cui, essendo dalla detta animella impedito il regresso, tanto maggiormente sollevasi, quanto maggior numero di volte lo stantufo alterna i suoi movimenti. Questa è l'ordinaria costruzione della tromba aspirante e pre-

mente. Monsignor Castelli Canonico del Duomo di Milano ha immaginata una nuova tromba aspirante, e premente da lui detta *Tromba Napoleone*, che sotto piccole dimensioni solleva grandissima quantità d'acqua, e la spinge in grandissima distanza per estinguere gl'incendj. Essendone anche economica la costruzione, è da desiderarsi, che se ne estenda l'uso; e noi consigliamo i nostri Lettori a vederne la descrizione data dall'Autore in un suo Opuscolo stampato nel 1808 nel n° X. del Giornale d'incoraggiamento, che si pubblicava in Milano.

Anche con questo genere di trombe può sollevarsi l'acqua a qualunque altezza nel tubo GZ, perchè l'elevazione per questo tubo dipende dall'azione non dell'aria, ma bensì della potenza applicata allo stantufo.

* 767. Per calcolare la forza necessaria a sollevare, e deprimere lo stantufo in questa tromba, convien riflettere, 1.° che quando si solleva la resistenza resulta dal peso p dello stantufo, e dalla pressione bgq dell'atmosfera; e la forza è coadiuvata dallo sforzo del cilindro aqueo TH espresso, come abbiamo avvertito sopra, per $bgq - bg(a + d)$; onde detta f la forza, che solleva lo stantufo, avremo come sopra (764) $f = \frac{4}{3}[p + bg(a + d)]$.

2.° Che quando lo stantufo si abbassa la resistenza eguaglia il peso del cilindro aqueo, che dee sollevarsi nel tubo GZ, e la pressione dell'atmosfera sopra il detto cilindro; e la forza è secondata dal peso p dello stantufo, e dalla pressione bgq dell'atmosfera. Ora siccome l'acqua spontaneamente si solleva nel tubo GZ fino all'altezza Iy per livellarsi col piano, cui è giunta nel corpo della tromba; così resisterà all'azione dello stantufo solo un cilindro, che avrà per altezza $yK = c$ (posto, che l'acqua giunta in K si versi), e per base la base b del tubo GZ; onde detta f la forza necessaria ad abbassar lo stantufo, avremo per l'equilibrio

sperienza sono atti alle ricerche idrauliche; specialmente se vogliano riferirsene alla pratica i resultati. E quindi è, che alle indicazioni dell' esperienza particolarmente ci atterremo in queste nostre considerazioni.

770. Su due ipotesi si appoggeranno le dottrine, che siamo per istabilire relativamente al moto dei fluidi.

I.ª Noi riguardiamo il fluido come *incompressibile*, e *continuo*; supponiamo cioè, che le particelle del fluido in qualunque stato del loro moto occupino sempre la medesima quantità di spazio, e stiano sempre le une accosto alle altre senza lasciar tra loro alcuno benchè minimo spazio vuoto.

Ammessa questa ipotesi, è chiaro, che se il recipiente, pel quale si muove il fluido non è per tutto d'ampiezza uniforme, dovrà esso fluido avere una celerità maggiore ne' luoghi più stretti, minore ne' più ampj. Realmente dall' apertura LF (*Fig.* 60) o nel fondo, o nelle pareti, del recipiente AO esca il prisma fluido pqgf. Mentre esso esce il livello TV si abbasserà in tv lasciando vuota nel recipiente la porzione TVvt di capacità eguale al volume del prisma pqgf; giacchè altrimenti il fluido si comprimerebbe, o si dilaterebbe: e ciò è contro l' ipotesi. Perciò detta e l' area dello strato TV, b l' area del foro LF; y l'altezza gq del prisma pqgf; x l'altezza del prisma TVvt, avremo la misura del prisma TVvt espressa per ex eguale alla misura del prisma pqgf espressa per by; cioè $ex = by$; e quindi $x : y :: b : e$. Ma x, e y sono gli spazj percorsi nel medesimo tempo dai due strati e, b; e detta c la velocità, con cui si muove b, c' quella, con cui si muove e, stando le celerità come gli spazj

percorsi nel medesimo tempo, avremo $c : c^1 :: e : b$. Dunque *in un recipiente, che non sia d' uniforme ampiezza le celerità dei diversi strati di un fluido, che ne sgorga stanno fra loro in ragione inversa dell' ampiezza di essi strati*.

771. II.° Noi supponiamo, che mentre un fluido sgorga da un recipiente AO per l' apertura LF tutti gli strati orizzontali TV, tv di esso fluido conservino abbassandosi il loro parallelismo in modo, che tutti i punti di un medesimo strato TV abbiano le medesime velocità verticali.

Si deduce da questa ipotesi, che la celerità dello strato prossimo all' apertura dipende dalle pressioni verticali, che sul medesimo esercitano gli strati superiori; e perciò anche dalla loro diversa celerità. Poichè se tutti gli strati si muovessero colla medesima celerità, le particelle del fluido non eserciterebbero alcuna azione le une sulle altre, e tutte si muoverebbero come corpi liberi.

772. Ora la prima delle enunciate ipotesi è confermata esuberantemente dall' esperienza, quando si tratti dell' acqua, e d' altri fluidi incompressibili (dei compressibili tratteremo a parte): relativamente poi alla seconda conviene osservare, che

1.° Da molti sperimenti fatti su i fluidi, che sgorgano per un piccol foro nelle sottili pareti, o fondo del loro recipiente prismatico verticale, si è dedotto, che la superficie del fluido si mantiene orizzontale finchè non arrivi vicino al foro di sgorgo (cioè alla distanza di circa tre raggi di esso foro); e perciò fino a quel punto si verifica esattamente la seconda ipotesi.

2.° Ma in vicinanza del foro gli strati fluidi s' inclinano formando una specie d' ombuto, o conoide,

cui si dà il nome di *gorgo*; probabilmente perchè la pressione dell' aria superiore sulla superficie del fluido non è contrabbilanciata dalla pressione dell' aria inferiore rarefatta dall' urto dell' acqua sgorgante. Quindi o perchè resti vicendevolmente ritardato l' egresso dei minimi filetti, che obliquamente, e in disordine si presentano, o perchè i filetti contigui alle pareti dell' orifizio siano alquanto trattenuti dall' attrito, o per altra cagione la *vena fluida* si contrae nel suo passaggio attraverso il foro, sia esso *armato* d' un tubo, o *disarmato*: si mantiene contratta per un piccolo spazio oltre il foro; e forma una specie di piramide tronca p y x q, che ha la base più piccola xy nel luogo, in cui cessando la contrazione la vena prende una figura prismatica. La diversa configurazione del foro dà alla vena contratta una diversa figura.

3.° Inerendo pertanto alle precedenti ipotesi bisogna riguardare il vaso prismatico AO come terminato da un tubo convergente formato dal gorgo, e dalla vena contratta; e in luogo dell' area della luce del foro LF bisogna prendere la sezione della vena fluida, ove termina la vena contratta, e aggiugnere all' altezza del vaso anche quella della vena contratta.

4.° Perciò l' *effettiva portata*, o la quantità di fluido, che esce dal foro disarmato in una parete sottile sta a quella, che senza la contrazione dovrebbe escirne per l' ampiezza di esso, o sia alla *portata teorica* come circa 5 : 8. Se poi il foro sia armato di un tubo, la portata effettiva sta alla teorica come circa 13 : 16. Talchè se l' area del foro o lume sia *b*, *l* la linea, che misura la velocità della colonna fluida, che n' esce in un dato tempo, sarà la portata

teorica bl, e l' effettiva $\frac{5}{8}\,bl$; o $\frac{13}{16}\,bl$; e generalmente (posto $m = 5$, ovvero $= 13$; $n = 8$, ovvero $= 16$) $\frac{mbl}{n}$, giacchè tanto maggior copia di fluido dee escire in un dato tempo, quanto più ampia è l'apertura vera, o corretta, che li dà l' egresso, e quanto è maggiore la velocità, con cui sgorga. Per istruirsi più esattamente di ciò, che appartiene alla contrazione della vena gli Studiosi potranno consultare le Opere del Belidor colle note del Navier, una Memoria di Hachette nei TT. 3, e 4 degli Annali di Chimica, e di Fisica; e quella di D' Aubuisson nel T. 43 dei citati Annali.

Egresso dei fluidi da' fori piccolissimi

773. Per determinare più facilmente le leggi dell' egresso dei fluidi dai recipienti, supponiamo, che il foro LF, per cui sgorgano, sia piccolissimo. Essendo le velocità in ragione inversa dell' ampiezza degli strati (770), e l' area dell' orifizio supponendosi infinitesima rapporto al fondo, o parete del recipiente, sarà infinitesima la celerità, che hanno gli strati fluidi nel recipiente. La qual cosa debbe intendersi come in generale d' ogni strato della massa fluida del recipiente, così ancora di quello, che è contiguo all' orifizio. Laonde lo strato inferiore della colonna fluida, che corrisponde al lume pq resisterà agli strati superiori, come se detto lume fosse serrato; e quindi detta a l' altezza della colonna fluida, che sovrasta al lume, g la gravità specifica dell' acqua, il prisma, o strato pF soffrirà una pressione abg (703). Noteremo in seguito qual rapporto debba avere l'area del foro a quella del fondo, o della

parete, in cui è scavato, perchè possa considerarsi praticamente come infinitesima.

Ora se nel tempo, che la pressione abg fa escire dall'orifizio il prisma qgfp, il peso d'un prisma pqxy espresso per bgz (ponendo l'altezza qx $= z$) faccia percorrere la piccola altezza z a questo prisma riguardato come immobile al principio del moto, le forze motrici saranno indicate da abg, bgz. Queste forze motrici sono proporzionali alle quantità di moto, che esse producono, onde detti m, m' i prismi qgfp, qxyp; c, c' le loro celerità, avremo $abg : bgz :: mc : m'c'$; $a : z :: mc : m'c'$. Ma essendo i prismi eguali al prodotto della base nell'altezza, abbiamo $m = by, m' = bz$, e perciò $mc : m'c' :: byc : bzc'$. Siccome poi in tempi eguali gli spazj y, z sono come le celerità c, c'; così $mc : m'c' :: bc^2 : bc'^2$; e $c^2 : c'^2 :: a : z$. Ora se C fosse la celerità, che un grave acquisterebbe cadendo dall'altezza a, si avrebbe $C^2 : c'^2 :: a : z$. Ma abbiamo trovato ora, che $c^2 : c'^2 :: a : z$. Dunque $C^2 = c^2$; $C = c$. *Perciò la celerità del fluido nell'egresso dall'orifizio è eguale alla celerità, che un grave acquisterebbe cadendo dall'altezza* a, *che il fluido ha nel recipiente*; lo che è confermato ampiamente dall'esperienza. Quindi 1.° La celerità d'egresso da un orifizio non dipende, che dalla profondità dell'orifizio sotto il livello del liquido, e per niente dalla natura del liquido, perchè tutti i corpi, qualunque ne sia la massa, acquistano la stessa celerità cadendo dalla stessa altezza.

E poichè il moto dei gravi è uniformemente accelerato.

774. 2.° L'acqua uscendo dall'orifizio LF ha una celerità tale, che la farebbe salire per tutta l'altezza a (114).

775. 3.° Se la celerità, con cui l' acqua esce dall' orifizio restasse costante, il prisma aqueo percorrerebbe uno spazio $2a$ nel tempo, che un grave impiegherebbe a cadere dall' altezza a (113).

776. 4.° Se in due recipienti siano a, a^1 le altezze dell' acqua al disopra di due orifizj infinitesimi, dette c, c^1 le velocità, con cui essa ne sgorga, e supposta costante la gravità, sarà $c : c^1 :: \sqrt{a} : \sqrt{a^1}$; cioè *le celerità, con cui l' acqua esce da orifizj infinitesimi, sono tra loro, come le radici quadre dell' altezze di essa ne' divesi recipienti.*

* 777. Dunque

I. Essendo $\sqrt{a} : \sqrt{a^1} :: c : c^1$; $a : a^1 :: c^2 : c^{12} :: \frac{c^2}{2\gamma} : \frac{c^{12}}{2\gamma}$ (267), se γ denoti la forza costante di gravità, l' altezza $a = \frac{c^2}{2\gamma}$ (si suppone, che sia $a^1 = \frac{c^{12}}{2\gamma} = 1$) sarà l' altezza dovuta alla celerità c dell' acqua. E quindi 1.° la forza abg trovata sopra (773) si riduce $bg\frac{c^2}{2\gamma}$; cioè la forza della pressione, o l' urto diretto dell' acqua è eguale al peso d' un prisma d' acqua, che abbia per base l' area premuta, o urtata, e per altezza l' altezza dovuta alla celerità dell' acqua, come coll'esperienza dimostrarono i sigg. D'Alembert, Condorcet (*Nouv. exp. sur la résistence des fluides Par.* 1777), e Bossut (*Mém. de l' Acad. des Scien. de Par.* 1778): 2.° avremo $c^2 = a.\ 2\gamma$; $c = \sqrt{a.\ 2\gamma}$ misura della celerità assoluta del fluido, che esce da un foro infinitesimo.

* 779. II. Dicasi q la quantità d' acqua escita dall' orifizio nel tempo t; t^1 il tempo, che un grave spenderebbe a cadere da un' altezza a^1, avremo $\sqrt{a^1} : \sqrt{a} :: t^1 : \tau = \frac{t^1\sqrt{a}}{\sqrt{a^1}}$ (112) tempo, in cui un grave percorrerebbe l' altezza a. Ora in questo tempo (essendo costante l' altezza a, e perciò la celerità dell' egresso) esce dall' orifizio LF un pri-

sma aqueo, che ha per base l' area b, e per altezza $2a$ (775), cioè un prisma eguale a $2ab$. Pertanto essendo le quantità di fluido, che escono dallo stesso orifizio in virtù della stessa pressione, come i tempi, in cui escono, avremo $\frac{t^1 \sqrt{a}}{\sqrt{a^1}}$: $t :: 2ab : q$; onde $t^1 q = \frac{2bt\sqrt{a^2 . a^1}}{\sqrt{a}} = 2bt\sqrt{a . a^1}$; equazione, che esprimendo il rapporto tra le quantità del fluido, che esce dal piccolo foro LF, il tempo, in cui esce, e l' altezza del fluido nel recipiente, dà le seguenti importanti determinazioni:

1.° $q = \frac{2tb\sqrt{a . a^1}}{t^1}$, ovvero $q = \frac{5tb\sqrt{a . a^1}}{4t}$ (772). E se due siano gli orifizj b, b^1, due le altezze costanti a^1, a^{11}, avremo $q : q^1 :: b\sqrt{a^1} : b^1\sqrt{a^{11}}$;

$$2.° \quad q = \frac{t^1 q}{2t\sqrt{a . a^1}};$$

$$3.° \quad t = \frac{t^1 q}{2b\sqrt{a . a^1}};$$

$$4.° \quad a = \frac{q^2 t^{12}}{4a^1 t^2 b^2}.$$

Se in vece della celerità relativa, e proporzionale a $\sqrt{a}$ si consideri l' assoluta, convien sostituire $\sqrt{2\gamma a}$ in luogo di $\sqrt{a}$ nelle formule superiori.

* 779. III. Che se dato un recipiente BA prismatico costantemente pieno, sia scavato il lume E $= b$ (*Fig.* 67) nella parete verticale, che abbia l' altezza AG $= k$, l' acqua, che esce dal medesimo con una celerità dovuta all' altezza a, sarà come un proietto scagliato colla forza abg, e descriverà perciò una parabola EF (369), che avrà per diametro EP, per parametro $4a = 4$AE, per ascissa EG $= x = k - a$, per ordinata GF $= y$.

780. Ora nella parabola $y^2 = 4ax$; $y = 2\sqrt{ax} = 2\sqrt{([k-a]a)}$. Volendo perciò conoscerne la massima ampiezza, o sia il valore massimo di y, ne differenzieremo questo valore, e avremo $\frac{dy}{da} = \frac{k-2a}{\sqrt{(k-a)a}} = 0$; onde $\frac{k}{\sqrt{(k-a)a}}$

$= \frac{2a}{\sqrt{(k-a)a}}$; $a = \frac{1}{2}k$; cioè la massima ampiezza si ha, quando il lume E sta nel mezzo dell' altezza del recipiente. Nel qual caso sostituendo il valore di a, avremo $y = 2\sqrt{\frac{k}{2}\left(k - \frac{k}{2}\right)} = k$; cioè l' ampiezza della parabola eguaglia l' altezza del vaso. Che se si aprano in K, e in L due lumi ad egual distanza h dal punto medio E, le parabole KO, LO avranno eguale ampiezza, poichè per ambedue si ha lo stesso valore di y. La prima in fatti dà $y^2 = 4AK \times KG = 4\left(\frac{k}{2} - h\right) \times \left(\frac{k}{2} + h\right)$; la seconda da $y^2 = 4AL \times LG = 4\left(\frac{k}{2} + h\right) \times \left(\frac{k}{2} - h\right)$; le quali cose sono tutte ampiamente confermate dall' esperienza.

* 781. Deesi qui notare, che se dal recipiente AB costantemente pieno esca l' acqua per il condotto G giacente in un piano inclinato GM, tirata la orizzontale MP dallo sbocco, o punto estremo M al prolungamento della verticale AG, la vera altezza dell' acqua sopra lo sbocco sarà AP = MN, e l' altezza GA si potrà chiamare *carico di acqua*.

* 782. IV. Se nell'altezza AG del recipiente si scavino diversi fori K, N, E, Q, L; colle AK, AN, AE, ec. si esprimano le altezze a, a', a''; e colle Kk, Nn, ec. ordinate ad AG le celerità relative c, c', c'', ec. o le assolute $\sqrt{a} \times 2\gamma$, $\sqrt{a'} . 2\gamma$, $\sqrt{a''} . 2\gamma$; la linea A k c n l, che passa per l' estremità di queste ordinate sarà una parabola; e la figura ALl si suol chiamare la *scala delle velocità relative, o assolute* dei fluidi, che sgorgano da una parete verticale in un mezzo non resistente.

* 783. V. Sia ora il recipiente (*Fig.* 68) ABLKHGFD traversato dai diaframmi verticali FC, GE, nei quali siano i fori infinitesimi C, E, per cui la divisione AC comunichi colla divisione FE, e questa con EK in modo, che possa il fluido dall' una passar nell' altra, ed escir finalmente per il foro L infinitesimo anch' esso. Supponiamo, che si mantenga l' acqua sempre alla medesima altezza, e che nel

passaggio da una all' altra divisione non si produca alcuna agitazione. È chiaro, che l' altezza DF è la sola, che agisce per spinger l' acqua per C, poichè la massa OFCB è in equilibrio colla massa egualmente alta FCEG; e per la stessa ragione l' altezza GH è la sola, che spinge il fluido per E; e l' altezza KL quella, che lo spinge per L. Siccome per ipotesi si mantiene l' acqua nel recipiente alla medesima altezza costantemente, le quantità d' acqua, che nel tempo t passano per i fori C, E, L saranno eguali, e potranno esser tutte rappresentate dalla stessa lettera q. Sia A l' altezza nota AB, x la DF, y la GH, z la KL; $C = c$, $E = e$ $L = l$, e per il numero 768 avremo $q = \frac{2\,tc\,\sqrt{a' x}}{t'}$; $q = \frac{2\,te\,\sqrt{a' y}}{t'}$; $q = \frac{2\,tl\,\sqrt{a' z}}{t'}$. Abbiamo in oltre $x + y + z = A$. Da queste quattro equazioni si ricavano i valori delle quantità x, z, y, q con altrettante equazioni, che contengono tutto ciò, che vi ha di più interessante rapporto al proposto problema: e siccome la più piccola perizia nel calcolo basta a svilupparlo, così lasciamo, che gli Studiosi da loro stessi lo sviluppino. Dobbiamo per altro notare, che lo sgorgo per i fori C, E, L non diviene uniforme, cioè le altezze del fluido, che lo producono non divengono costanti (come lo dimostra l' esperienza) che dopo un certo tempo. Questo tempo facilmente si determina per i casi particolari, ma con un calcolo assai lungo, che può vedersi nel cap. VI. dell' Idraulica del Bossut.

784. Il vaso ApqD (*Fig.* 60) vada successivamente votandosi per l' infinitesimo orifizio pq in modo, che la superficie del fluido prenda successivamente le posizioni AD, TV, BC. Nelle indicate posizioni la celerità dello scolo è proporzionale alle radici delle respettive altezze pA, pG, pB.

Supponiamo pertanto arrivato il livello del fluido alla posizione TV, e facciasi $pA = a$; $AG = x$, onde $pG = a - x$. Se l' altezza $a - x$ si mantenesse costante, si avrebbe (777) la celerità assoluta espressa per $\sqrt{[2\gamma(a - x)]}$, e perciò nel tempo t, fatta l' altezza $a' = 1$, e il tempo $t' = 1$, uscirebbe dal foro pq una quantità di fluido $2bt \times \sqrt{[2\gamma(a - x)]}$ ovvero $\frac{5}{4}\, bt \sqrt{[2\gamma(a - x)]}$ (778).

Ora l' altezza del fluido si può considerare come costante, e il moto di scolo come uniforme nel tempo infinitesimo dt. Dunque $t : dt :: \frac{5}{4} bt \times \sqrt{2\gamma(a-x)} : \frac{5}{4} bdt \times \sqrt{2\gamma(a-x)}$ quantità di fluido, che esce nel tempo dt. Ma detta X la superficie, o piano di livello del fluido, la quantità, che ne esce nel tempo dt è eguale anche al prisma infinitesimo Xdx di fluido. Dunque $\frac{5}{4}\, b\, dt\, X \sqrt{2\gamma(a-x)} = Xdx$; e perciò

$$dt = \frac{4Xdx}{56 \times \sqrt{2\gamma(a-x)}}$$; e integrando

$$t = \frac{4}{56}\sqrt{\frac{1}{2\gamma}} \times \int \frac{Xdx}{\sqrt{(a-x)}} + Cost.$$: equazione, che dà valori diversi di t, secondo che diverso è il valore di X, il quale dipende dalla figura del vaso.

Egresso dei fluidi da ampie aperture.

785. Finchè i fluidi sgorgano da orifizj infinitesimi, tutto ciò, che interessa il loro moto ben facilmente può dedursi dal principio, che la celerità dello sgorgo è prodotta dal peso della colonna fluida, che sta al disopra dell' orifizio. Ma se gli orifizj siano ampj notabilmente, siccome questo principio non ha più luogo; così non può calcolarsi con egual facilità il moto dei fluidi, che ne sgorgano. E d' uopo in tal caso ricorrere, e realmente sono ricorsi gl' Idraulici a diverse ipotesi più, o men ragionevoli; tutte però tali, che esigon sempre per ogni caso una special correzione sperimentale. Ma le formule, cui queste ipotesi conducono sono nella loro generalità sì complicate, che non possono aver luogo in un trattato elementare: tanto più, che stabiliscono solo delle verità piuttosto curiose, e speculative, che utili, e pratiche. Gli Studiosi potranno consultare su tal soggetto i Capitoli IV., e V. dell' Idraulica del Bossut, e il Libro V. del Trattato di Mecca-

nica del Poisson; e Noi non ne diremo, che alcune poche cose le quali ci sembrano applicabili utilmente alla pratica.

786. Supponiamo, che gli ampj orifizj siano o orizzontali, o verticali. Se siano orizzontali, a rigor matematico lo sgorgo non è prodotto dalla pressione della colonna superiore, mancando la resistenza, o reazione dell' ultimo strato, che è necessaria, perchè gli strati superiori possano esercitare una pressione. Ogni particella di fluido obbedisce in tal caso contemporaneamente alla gravità propria, e all' azione delle particelle contigue, azione, che ora è secondata, ora è contrariata dalle reciproche loro adesioni. Per altro si osserva nella pratica, che se il rapporto dell' area dell' orifizio al fondo non oltrepassi quella di 1 : 20, queste forze si combinano per così fatta guisa, che la celerità dello sgorgo è la stessa, che se fosse prodotta dalla pressione della colonna superiore. Solo si osserva, che ella non diviene uniforme, se non dopo un numero di secondi maggiore, o minore, secondo che maggiore, o minore è l' ampiezza dell' orifizio. Quando poi l'orifizio abbia al fondo una ragion maggiore, che 1 : 20, non mi è noto, che l' esperienza abbia fissato alcun canone generale sulla quantità, e celerità dello sgorgo. Solo è chiaro, che può in tal caso avvenire, che la massa sgorgante si muova anche indipendentemente da ogni impulso superiore, e unicamente in virtù della propria gravità, come un corpo staccato. Ciò accaderebbe, se per es. si togliesse il fondo ad un vaso prismatico, o ad un vaso piramidale più largo in basso. Fuori di questo caso in ogni particolar circostanza bisogna aver ricorso ad una particolare esperienza per ottener le notizie occorrenti.

787. Così pure se l'orifizio, o emissario d'un recipiente sia di notabil grandezza, e verticale, non può determinarsi lo scolo, che per mezzo d'esperimenti, e d'ipotesi. Poichè come le diverse parti dell'orifizio hanno diverse distanze dalla superficie del fluido; così le diverse particelle, che lor corrispondono soffrono una diversa pressione, ed hanno conseguentemente una diversa celerità. Propone il Bossut la segnente ipotesi, che per quanto non sia fondata sopra un ragionamento pienamente dimostrativo, pure siccome corrisponde ai resultati dell'esperienza, può abbracciarsi per la pratica con tutta la sicurezza. Si supponga l'orifizio verticale serrato con una tavola, in cui sia un numero infinito di fori infinitesimi, pe'quali l'acqua possa escire tale, che la loro somma sia eguale all'area o *luce* dell'orifizio finito. Da ognuno di questi fori si fa lo scolo come nel caso contemplato nei num. 773, e 776, cioè con una celerità proporzionale alla radice quadra della corrispondente altezza del fluido; e può determinarsi la quantità d'acqua, che n'esce col metodo del num.° 778. La somma di tutte queste quantità elementari di fluidi trovata o col calcolo integrale, o con altro mezzo determinerà la quantità totale, che in un dato tempo scola dall'intero orifizio. In questa ipotesi si chiama *altezza media* dell'acqua sopra la luce quell'altezza, che se fosse comune a tutti i supposti fori, o generalmente a tutti gli elementi della luce, darebbe la stessa portata, che danno i diversi elementi collocati come sono a diverse altezze. Dicesi *battente* quella porzione di parete del recipiente, che è compresa tra il limite superiore dell'apertura, e il livello dell'acqua. Potranno vedersi nell'Idrodinamica del Bossut e le applicazioni, e i fondamenti sperimen-

tali della esposta ipotesi. Ma dopo il Bossut diversi Autori hanno illustrata coll'esperienza, e col calcolo la dottrina dello sgorgo dei fluidi da aperture di varia forma, e dimensioni più, o men grandi; e tra questi oltre Prony Brunning, Navier, Eytelwein, rammenteremo il Brunacci, che ha fatte molte sperienze a Pavìa (*Giorn. di Fis. ec. Pavìa T.* 1 *p.* 385), Bidone a Turino (*Mém. de l'Acad. de Turin T.* 22, *p.* 281), e più recentemente Lesbros, e Poncelet a Metz negli anni 1827-29 (*An. de Chi. et de Phys. T.* 53 *p.* 386): e quegli, che si dirigono alla pratica rileveranno molto vantaggio dall'esame dei lavori di questi valent' Uomini.

788. Abbiasi pertanto nel recipiente BAEFD (*Fig.* 69) di figura prismatica a base qualunque ripieno d'acqua un'apertura verticale MNEF. Si conducano le rette PQ, pq infinitamente vicine parallele alla orizzontale MN; e sia $EF = f$; $MP = x$, $Pp = dx$; $MC = a$ altezza del battente; e sia b la luce, o l'area dell'apertura. La velocità, con cui l'acqua sgorga nel punto P è proporzionale (776) a $\sqrt{(x+a)}$; e potendosi supporre, che per l'altezza infinitesima $Pp = dx$ si mantenga la medesima, la quantità d'acqua escita dal recipiente nel tempo t per l'area elementare $Pq = fdx$ sarà proporzionale a $fdx \sqrt{(a+x)}$; e quindi la total portata della luce o apertura sarà proporzionale a $\int fdx \sqrt{(a+x)}$. Ma se H rappresenti l'altezza media, questa portata è anche proporzionale a $b\sqrt{H}$. Dunque $b\sqrt{H} = \int fdx \sqrt{(a+x)}$; e quindi $H = \frac{(\int fdx \sqrt{(a+x)})^2}{b^2}$. Trovata così l'altezza media, potremo riguardare l'apertura come infinitesima; avremo (777) la celerità media $= \sqrt{2\gamma H}$; e quindi la portata $bt\sqrt{2\gamma H}$.

Ora la distanza del centro di gravità della luce dal livello dell'acqua è $\frac{\int fdx\,(a+x)}{\int fdx} = \frac{\int fdx\,(a+x)}{b}$ (217) essendo $b = \int fdx$. Se questa espressione si confronti con quel

la dell' altezza media, qualora l'altezza del battente sia tale, che si possa riguardar come costante $a + x$, avremo

$$\frac{(\int fdx \sqrt{(a+x)})^2}{b^2} = \frac{(a+x)(\int fdx)^2}{(\int fdx)^2} = \frac{(a+x)\int fdx}{\int fdx} = \frac{\int fdx\,(a+x)}{b};$$

cioè si potrà prendere l'altezza media per eguale alla distanza del centro di gravità della luce dal livello superiore dell' acqua: lo che si fa non di rado nella pratica (*V. Venturoli El. d' Idraulica n.* 188).

789. Supponiamo ora, che l'acqua possa liberamente sgorgare per l'apertura EFDC, e si mantenga costantemente alla stessa altezza EM $= h$. Col medesimo ragionamento del n. precedente considerando la velocità dell' acqua in un luogo qualunque P come una funzione tale di x, che divenga maggiore, quando x divien maggiore, e che si chiamerà X, si troverà, che la quantità d' acqua escita dall' apertura EN nel tempo t sarà $ft \int Xdx$, se questo integrale si prenda da $x = 0$ fino ad $x = h$. Sarà dunque $\int Xdx$ così determinato una funzione di h, che chiameremo $F.h$; e la quantità dell' acqua escita dal recipiente sarà $ft\ F.h$, la quale essendo evidentemente tanto maggiore, quanto più cresce l'altezza della superficie dell' acqua, è chiaro, che $F.h$ qualunque ella sia, dee però esser tale, che divenga maggiore, maggiore divenendo la quantità h.

Siccome poi per ipotesi l'altezza dell' acqua nel recipiente si mantien costante; così sarà ancora $ft \times F.h$ la quantità d' acqua portata nel vaso dall' influente abb' a'.

790. Posto ora, che mantenendosi costante l'apertura ED, e la quantità d' acqua portata dall' influente, si diminuisca l'ampiezza del vaso, cerchiamo a qual permanente altezza si stabilirà l'acqua in questo nuovo recipiente. Sia $h + \omega$ quest' altezza maggiore, se è possibile, che nel primo recipiente; e l'acqua escita nel momento dt sarà $fdt \times F.(h + \omega)$. Ma l'acqua, che vi entra essendo quella di prima, cioè $fdtF.h$, esce dal nuovo recipiente una quantità d' acqua maggiore di quella, che vi entra, perchè $F(h + \omega) > F.h$; onde la superficie dell' acqua tende ad abbassarsi. Lo stesso accaderà nel successivo momento, finchè l'altezza dell' acqua, si manterrà maggiore di h, nè vi sarà egua-

glianza tra l'acqua, che esce, e quella, che entra, se non quando l' acqua nel recipiente sarà discesa all' altezza h. Per tanto l' acqua nel nuovo recipiente sarà in uno stato permanente, quando sarà giunta al medesimo livello, cui era prima del ristringimento del recipiente.

791. Apparisce da ciò, che ristringendosi il recipiente di un lago senza, che se ne ristringa l' emissario, il livello permanente dell' acqua non si solleverà sopra il livello dell' antico recipiente.

792. Che se mantenendosi costante l' apertura, la quantità d' acqua nell' influente cresca nel rapporto di $1 : n$, ne entrerà nel tempo dt non più una quantità $fdtF.h$, ma bensì $nfdtF.h$. Per questo aumento si alzerà la superficie dell' acqua, finchè giunga ad una altezza tale, che esca dal recipiente nel medesimo tempo tant' acqua, quanta ve n' entra. Chiamata x questa altezza incognita, l' acqua escita nel tempuscolo dt sarà $fdtF.x$; e supponendola eguale ad $fdtF.h$, avremo $F.x = nF.h$, equazione, che risoluta darà $x = \varphi(n, h)$; e questa sarà l' altezza, cui si stabilirà l' acqua in tempo dell' aumento dell' influente. Siccome quest' altezza è indipendente dalla figura del recipiente, è chiaro, che in tal caso la superficie dell' acqua si alzerà egualmente nel recipiente più ampio, e nel più stretto.

793. Ma è molto interessante di considerare in questa ricerca anche un altro elemento, cioè il tempo, durante il quale l' acqua si mantiene ad una data altezza. Sia x l' altezza, a cui nel tempo t per l' aumento dell' influente si è sollevata la superficie dell' acqua nel primo recipiente in modo, che h diventi x, e dopo il tempuscolo dt la medesima superficie sia all' altezza dx. Chiamata A la sezione orizzontale del primo recipiente, sarà Adx la quantità d' acqua acquistata dal recipiente nel tempo dt, la quale debbe essere eguale alla differenza tra l' acqua $fndt\ F.h$ entrata, e l' acqua $fdt\ F.x$ escita dal recipiente, onde avremo

$$fdt\,(nF.h - F.x) = Adx;\ fdt = \frac{Adx}{nF.h - F.x}.$$

Poniamo A' eguale alla sezione orizzontale del secondo recipiente, e t' il tempo, in cui la superficie dell' acqua giunge in esso alla medesima altezza x, e dt' il tempo, in

cui percorre il medesimo spazietto dx, ed avremo similmente $fdt' = \frac{A' dx}{nF.h - F.x}$. Quindi $fdt : fdt' :: \frac{Adx}{nF.h - F.x} : \frac{A' dx}{nF.h - F.x}$; $A' dt = Adt'$, e integrando $A't = At'$ senza Cost., perchè quando $t = 0$, anche $t' = 0$. Dunque $t : t' :: A : A'$; cioè i tempi, nei quali la superficie dell' acqua è giunta nei due recipienti ad una medesima altezza stanno tra loro, come le sezioni orizzontali dei recipienti.

E se dicasi T il tempo, in cui nel primo recipiente l' acqua giugne all' altezza massima, il tempo, in cui vi giugne nel secondo recipiente sarà $\frac{A' T}{A}$, e la differenza di questi tempi sarà $\frac{A - A'}{A} T$, cioè proporzionale alla differenza delle sezioni. E se Θ è il tempo, in cui l' acqua nel primo recipiente si mantiene alla massima altezza, vi si manterrà nel secondo per il tempo $\Theta' = \frac{A - A'}{A} T + \Theta$, cioè per il tempo, che vi si mantiene nel primo unito alla differenza de' tempi o positiva, o negativa.

794. Se l' acqua dell' influente, che prima cresceva, ora diminuisca nel rapporto di $1 : n$; cioè se torni ad esser quella di prima, e dicasi t il tempo, in cui nel primo recipiente dall' altezza massima, che diremo h' si riduce all' altezza x, avremo l' equazione $fdt = \frac{-Adx}{F.x - F.h'}$, in cui si prende $-dx$, perchè x diminuisce, quando t cresce.

Similmente per rapporto al secondo recipiente avremo $fdt' = -\frac{A' dx}{F.x - F.h'}$, e come sopra ne dedurremo, che i tempi, nei quali la superficie dell' acqua nei due recipienti si abbassa d' una data altezza, sono tra loro come le sezioni orizzontali; e quindi si vuota più presto il recipiente più stretto, che il più largo.

È facile pertanto dedurre da questi principj, che se siano due recipienti, dei quali il primo più ampio del secondo, l' acqua arriverà alla massima altezza nel primo più tardi, che nel secondo. Cominciando l' acqua a calare con-

temporaneamente in ambedue, le sezioni superiori del recipiente più stretto restano coperte dall' acqua più lungamente, che quelle del più ampio. Ma il più stretto si vuota più presto, che il più ampio. Debbono dunque essere nel più stretto anche delle sezioni, che restino coperte dall' acqua per minor tempo, che nel più largo. Il limite, che separa le sezioni coperte dall' acqua più lungamente da quelle coperte men lungamente nell' altro recipiente è una piccola sezione, al di sopra della quale l' acqua si trattieue egualmente in ambi i recipienti, e dicesi *linea* di *confine* dal Sig. Com. Paoli in un suo Opuscolo inedito comuuicato all' Accademia di Lucca, dal quale abbiamo presa tutta questa, ed altre importanti dottrine. Le sezioni situate al disopra di questa linea di confine sono coperte dall' acqua più lungamente nel recipiente più stretto, che nel più largo; ma al disotto di questa viceversa si mantiene l' acqua più lungamente nel recipiente più largo, che nel più stretto.

795. Resulta dalle cose precedenti, che quando lo scolo dei due recipienti si mantiene del tutto libero, il livello permanente dell' acqua in essi contenuta è sempre lo stesso, comunque sia o scarso, o abbondante d' acqua l' influente. Così pure chiaro apparisce, che lo stesso succederà, quando l' apertura del recipiente soffrirà qualche alterazione nella sua ampiezza, purchè questa sia in ambedue la medesima. Ma se verrà ad impedirsi interamente lo scolo, l' acqua si solleverà inegualmente nei due recipienti; le differenze del livello attuale da quello, che aveva prima, staranno in ragione inversa delle sezioni orizzontali dei medesimi recipienti; e questo rapporto si manterrà sempre, finchè sarà impedito lo scolo. Se poi supponiamo, che tolto qualunque impedimento, si dia come prima libero affatto l' esito all' acqua, si vuoterà più presto il recipiente più stretto, che il più largo, quantunque nel primo l' acqua sia a maggiore altezza, che nel secondo.

796. I resultati ottenuti fin qui son veri esattamente solo quando le pareti dei recipienti son verticali, come noi le abbiamo supposte. Nel caso, che siano inclinate all' orizzonte, o curve, le dottrine stabilite non si avverano, che approssimatamente, e l'approssimazione sarà tanto maggiore,

quanto maggiore sarà l' ampiezza dei recipienti. Realmente chiamando B la più piccola sezione orizzontale d' uno di tali recipienti, avremo in qualunque altro punto $A = B + V$, se sia V una funzione di x dipendente dalla figura delle pareti; e i teoremi dimostrati per l' ipotesi, che la sezione A sia costante, avranno luogo prossimamente in quei casi, in cui si può riguardar come tale, cioè trascurar senza error sensibile V in confronto di B. Ora ciò è permesso, quando il rapporto $\frac{V}{B}$ è piccolissimo, o sia quando l' ampiezza dei vasi in lunghezza, o larghezza è grandissima in proporzione della profondità dell' acqua in essi contenuta.

797. Quindi le precedenti dottrine possono con qualche modificazione applicarsi ai recipienti di considerabile ampiezza, cioè ai laghi, e ai paduli. E primieramente qualunque sia la loro grandezza, in tempo d' acque basse avrà luogo in essi quella medesima proprietà, che sopra abbiamo osservata nei recipienti di piccola estensione. Dato un lago, o padule qualunque, se per mezzo delle colmate verrà a ristringersene l' alveo, il livello permanente dell' acqua si manterrà il medesimo; onde se le acque si conservassero sempre basse, si potrebbero continuar le colmate, ed in conseguenza il ristringimento dell' alveo fino ad una data misura senza alcuno inconveniente (V. *Paoli l. c.*).

798. Ma nel caso della piena degl' influenti bisogna considerare un altro elemento, che abbiamo trascurato fin qui. Noi abbiamo tacitamente supposto, che l' acqua portata dalla piena dell' influente si spandesse subito per tutta la superficie del recipiente, e giugnesse in un momento all' emissario. Questa supposizione può senza inconveniente ammettersi, quando si tratta di piccoli recipienti. Ma in quei di molta estensione è necessario di considerare il tempo, che la piena spende a giugnere dall' influente all' emissario; la qual considerazione porta, come vedremo, ad un limite del ristringimento secondo le circostanze locali, e insieme richiede, che le colmate si facciano non capricciosamente, ma con una certa regola.

Sia pertanto MQPN (*Fig.* 70) una sezione del letto di

un lago presa dall' influente, che si suppone in A, all' emissario in B; e sia AB lo stato permanente del *pelo* del lago (cioè del livello dell'acqua, che contiene) in tempo di acque basse. L' acqua della piena sopravveniente cominci a stendersi sulla superficie del lago; in un dato tempo, per es. in un minuto progredisca verso l' emissario fino in D; e la superficie di essa sia rappresentata dalla linea CD. Nel secondo minuto giugnerà in F secondo la linea EF, e poi in H colla superficie GH; e così in seguito arriverà all' emissario in B dopo un dato tempo. Sopravvenendo sempre nuova acqua, sempre si alzerà il pelo del lago, finchè sia giunto all' altezza permanente MN, cioè finchè in un dato tempo tant' acqua sia portata dall' influente, quanta appunto se ne scarica per l' emissario.

799. Supponiamo, che la piena rimanendo la stessa, l' alveo del lago siasi per le colmate notabilmente ristretto. L'acqua portata dalla piena nel primo minuto non avendo tanta facilità di spandersi lateralmente, si alzerà di più, e di più insieme si avanzerà verso l' emissario in modo, che se la sua superficie era nel primo caso CD, divenga ora, per es. cd. Lo stesso accaderà nei tempi successivi; e la piena giungerà più presto all' emissario in questo secondo recipiente, che nel primo; e tanto più presto, quanto maggiore sarà il ristringimento del recipiente.

Giunto il pelo del lago ad uno stato permanente, se fosse orizzontale sì in questo, che nel primo caso, dovrebbe essere precisamente alla medesima altezza in ambedue; poichè l' acqua portata dalla piena essendo la stessa, lo stesso dovrebbe esserne lo smaltimento per l' emissario. Ma il livello dell' acqua non potendo essere orizzontale, se non quando ella è in equilibrio (701), il pelo del lago in tempo di piena è inclinato, e la sua inclinazione ha un rapporto colla velocità dell' acqua, che in esso scorre. Siccome dunque la piena nel secondo recipiente più augusto corre con maggior velocità, che nel primo, così dovrà essere in quello la superficie maggiormente inclinata, che in questo. Perciò, sebben l' altezza ragguagliata dell' acqua sia in ambi i recipienti la medesima, il pelo del secondo sarà più incli-

nato di quello del primo, e sarà rappresentato per es. dalla linea mn.

800. Quindi è, che il ristringimento del letto del lago

1.° Riesce vantaggioso alle campagne vicine all' emissario, e nocivo a quelle, che ne sono lontane. 2.° Rende necessario di regolare le colmate in guisa, che le campagne bonificate acquistino una pendenza verso l' emissario tanto più grande, quanto più si avanzano le bonificazioni nel letto del lago; onde ridotte le colmate a un certo segno, prima di progredir più oltre, bisogna osservare, se le campagne già bonificate siano abbastanza alte per non esser danneggiate dalla maggiore inclinazione, che acquisterà il pelo del lago; e in caso, che non lo fossero, è d' uopo cominciare dal rialzar queste prima d' intraprendere nuovi lavori. Che se per le circostanze locali non possa ulteriormente accrescersi la pendenza della campagna verso l' emissario, ciò porrà un limite al ristringimento, e bonificazione del letto del lago. Ma se le condizioni degli influenti permettono di colmare indefinitamente tutta la campagna, potrà senza dubbio ridursi impunemente tutto il lago ad un semplice canale; purchè per altro si usino le opportune cautele ben conosciute dai Pratici per prevenire i danni della troppa inclinazione del pelo delle acque ridotte, che esse siano in canale.

Moto dell' acqua per gli alvei, e per i tubi.

801. La considerazione dell' egresso dell' acqua dai recipienti naturalmente ci guida ad esaminarne il moto, e la celerità per gli alvei, e pei condotti.

Indicasi colla parola *alveo*, o *letto* una lunga cavità naturale, o artificiale limitata lateralmente da *rive*, o *sponde*, per cui scorrono le acque dei fiumi, o dei canali. L'alveo si divide in *sezioni*; e le sezioni son piani normali al fondo, ed alle sponde. Quando l' alveo ha la figura esatta di parallelepipedo, le sezioni son

piani rettangolari; ma è ben raro in natura, che gli alvei abbiano questa figura regolare, poichè le acque, che vi scorrono, portando seco bene spesso delle materie estranee, le depositano or quà, or là, e formano nel fondo dei rialzamenti irregolari, che taluni chiamano *ridossi*; talvolta con troppo impeto strisciando sul fondo lo scavano, o radendo le sponde ci fanno delle corrosioni, delle tortuosità, ec.

802. Se l' alveo fosse perfettamente regolare, e privo di scabrosità, e di asprezze, la celerità dell'acqua a circostanze pari sarebbe negli alvei proporzionale alle loro inclinazioni. Ma e le irregolarità accennate, ed altre cagioni rendono sempre la celerità dei fiumi soggetta a molte modificazioni. E segnatamente ella non è per ordinario uniforme, nè meno in tutte le parti di una stessa sezione poste anche nella stessa linea orizzontale. L'acqua, che rade le sponde soffrendo dalle medesime maggiore attrito di quella, che scorre nel *filone*, o nel mezzo, si muove con una celerità minore. E diversa è pure la celerità nelle diverse altezze della stessa sezione per la diversa pressione dell' acqua, che ne è al di sopra. Talchè per conoscere la celerità di un fiume, bisogna misurarla in diversi punti di diverse sezioni, e prenderne la media risultante da replicate misure. Noi accenneremo altrove più opportunamente con quali mezzi possa determinarsi la celerità media dei fiumi, e ciò, che appartiene all' essenzial dottrina dei medesimi.

*803. A' metodi sperimentali principalmente bisogna aver ricorso per rilevarne anche ciò, che interessa il moto dell' acqua nei condotti. Al piccolo foro G=ab (Fig. 67) d'un recipiente, o conserva AB, in cui l' acqua si mantiene costantemente ad una medesima altezza, uniscasi un tubo,

o *condotto* GM. Se questo condotto ha in M un' apertura normale all' asse, l' acqua sgorgandone formerà una parabola MR (779); ma se sia in M curvato all' insù, e terminato in un orifizio di assai più stretto diametro detto *spillo* formerà un getto MZ.

Le formule dei nn. 772, 778 danno siccome la portata teorica, ed effettiva, così ancora la quantità d' acqua, che esce in un tempo t per questi fori. E poichè si suppone, che non si produca ringorgo alcuno, quant' acqua passa in un tempo per G, tanta dee sgorgarne per M.

Questa quantità d' acqua se produce un getto, lo produce d' altezza diversa, secondo che diverso è il rapporto del diametro del condotto al diametro dell' orifizio, o spillo M. Sia l' area b del foro G, o la sezione del condotto $= r^2\pi$, e quella dello spillo, o del getto M $(=\beta) = r'^2\pi$; dette Q, Q' le loro portate $\frac{mbl}{n}$; $\frac{m\beta l'}{n}$, avremo $Q : Q' :: bl : \beta l' :: r^2 l : r'^2 l'$. Ora poichè $Q = Q'$, cioè $r^2 l = r'^2 l'$; avremo $r^2 : r'^2 :: l' : l$. Ma nel moto uniforme (tale è quello d' un fluido, che sgorga da un foro per una pressione costante) gli spazj sono come le celerità c, c'; e gli spazj in tal caso sono come le lunghezze l, l'; dunque $r^2 : r'^2 :: c' : c = \frac{r'^2 c'}{r^2}$. Ma l' altezza dovuta alla celerità c' del getto è AP $= a$ (781). Dunque la celerità c nel dato condotto sarà $\frac{r'^2 \sqrt{a}}{r^2}$; e per un altro condotto, da cui producasi un altro getto, $C = \frac{R'^2 \sqrt{A}}{R^2}$. Supposto per tanto, che questo secondo getto si sia trovato per esperienza il più vantaggioso di quanti possano aversene con una medesima altezza A, e con uno stesso raggio R; perchè l' altro getto abbia egual vantaggio, dovrà farsi in modo, che siano eguali le celerità c, C ne' due condotti, cioè che sia $\frac{r'^2 \sqrt{a}}{r^2} = \frac{R'^2 \sqrt{A}}{R^2}$. Ora se si abbia $A = 467$ linee; ed $R = 6$ linee, le sperienze del Bossut dànno $R' = 1\frac{2}{9}$ linee. Dunque se sia data l' altezza a, e il raggio r, si avrà da questa equazione il valo-

re di r'; e generalmente date, o prese ad arbitrio due delle tre quantità a, r, r', si conoscerà subito l'altra.

* 804. La massima altezza verticale del getto dovrebbe secondo la teorica eguagliare l'altezza costante della conserva (774); ma nella pratica è sempre minore, prescindendo dal caso, in cui l'aria insinuata dentro al condotto coll'impulso della sua elasticità la renda per qualche momento maggiore. L'esperienze del Mariotte, e del Bossut concorrono a provare, che la differenza fra le altezze dei getti, e delle conserve sono come i quadrati delle altezze dei getti.

* 805. Questa differenza dipende dalla resistenza dell'aria, e dalla diminuzione di celerità, che nelle particelle inferiori della colonna aquea, o del getto producono le superiori, che ricadono, e principalmente dall'attrito, che l'acqua soffre radendo le pareti del condotto, e dello spillo. Perlochè questa differenza si rende minore inclinando un poco il getto, e scemando gli attriti, quanto si può. Vuolsi poi avvertire, che il Du Buat con molte sperienze ha trovato essere insensibile la differenza dell'attrito, che si ha coi tubi di diversa materia: così che è indifferente l'usare tubi di metallo, o d'argilla.

* 806. L'attrito non solo diminuisce l'altezza del getto, ma ancora la portata effettiva del condotto; onde equivale ad un ristringimento del lume. Sia tale questo ristringimento, che la sezione del condotto da b ($= r^2 \pi$) riducasi β ($= r'^2 \pi$), e la portata Q diventi Q'. La celerità dell'acqua nel condotto sarà $c = \frac{r'^2 \sqrt{a}}{r^2}$ (803), e l'altezza dovutale $\frac{r'^4 a}{r^4}$ (104). Ma essendo $r > r'$, è $a > \frac{r'^4 a}{r^4}$. Dunque l'acqua, che ha una celerità, o forza corrispondente all'altezza a, e intanto sgorga con una forza, o celerità corrispondente all'altezza $\frac{r'^4 a}{r^4}$, impiegherà il restante della forza corrispondente all'altezza $a - \frac{r'^4 a}{r^4}$ contro le pareti del condotto. Per lo che se normalmente alla direzione del moto dell'acqua si faccia nelle medesime un piccol foro b', l'acqua farà per esso un getto dovuto ad un'altezza

$a - \frac{r'^4 a}{r^4}$. Si osservi la portata q' di questo foro in 1', e si calcoli la portata q, che se ne avrebbe nel medesimo tempo, se il condotto fosse chiuso, e l' acqua si conservasse ad un' altezza costante. Essendo eguale il lume, e il tempo (778), abbiamo $q : q' :: \sqrt{a} : \sqrt{\left(a - \frac{r'^4 a}{r^4}\right)} :: 1 : \sqrt{\left(1 - \frac{r'^4}{r^4}\right)}$, e quindi $q^2 : q'^2 :: 1 : 1 - \frac{r'^4}{r^4}$; $q'^2 = q^2 - \frac{q^2 r'^4}{r^4}$; $\frac{r'^2}{r^2} = \frac{\sqrt{(q^2 - q'^2)}}{q}$. Ma essendo eguali i tempi, e le altezze si ha $Q : Q' :: b : \beta$ (778) $:: r^2 \pi : r'^2 \pi$. Dunque $Q' = \frac{r'^2 Q}{r^2} = \frac{Q\sqrt{(q^2 - r'^2)}}{q}$; equazione, da cui istituite le opportune sperienze, o calcoli, si rileverà la diminuzione della portata in conseguenza dell' attrito.

* 807. Queste diminuzioni si rendono tanto più sensibili, quanto più lungo è il condotto. Dall' esperienza risulta, che *le quantita d' acqua sgorgate in tempi eguali da uno stesso condotto orizzontale sotto una stessa altezza di conserva, ma a diversa distanza dell' orifizio d' egresso dalla conserva, sono tra loro prossimamente in ragione reciproca subduplicata di queste distanze*.

Ma in molto maggior ragione diminuiscono queste quantità, se i tubi siano molto stretti, o curvilinei, specialmente poi se abbiano degli angoli o retti, o acuti, poichè in tutti questi casi si aumentano, come è evidente, gli attriti, e si diminuiscono le celerità dell' acqua.

E segnatamente l' esperienza dimostra, che 1.° il moto dell' acqua è più ritardato nei tubi, che serpeggiano verticalmente, che in quelli, che serpeggiano orizzontalmente; 2.° che le piegature ad angolo rettilineo rallentano la celerità dell' acqua più delle piegature curvilinee; 3.° che è nociva meno d' ogn' altra quella piegatura, nella quale l' asse CB del tratto di tubo rettilineo (*Fig.* 51) superiore incontrando in B la cavità della parete, ed essendone riflettuto con angolo e-

guale a quello d' incidenza prende la direzione dell' asse dall' altro tratto rettilineo inferiore BD.

* 808. Finalmente se ad un foro G nella parete d' un recipiente AB (*Fig.* 67) si aggiunga un tubo GM, la quantità dell' acqua, che ne sgorgherà sarà diversa secondo la diversa posizione, e forma del tubo; ed ecco ciò, che risulta dall' esperienze istituite per determinare queste diversità.

1.° La portata, che si ottiene quando il foro è in una lastra sottile, e disarmato sta a quella, che si ottiene quando il foro è armato d' una cannella cilindrica orizzontale, ed a quella, che si ottiene quando il foro, oltre ad essere armato come abbiam detto, è incavato interiormente a seconda della vena contratta :: 10 : 13 : 16. Infatti abbiamo detto sopra (772); che la vena contratta riduce la portata effettiva Q a $\frac{5}{8}$ della teorica Q'' quando il foro è disarmato, e riduce la portata effettiva Q' a $\frac{13}{16}$ della teorica Q'' quando è armato di tubo. Avremo dunque $Q = \frac{5}{8} Q''$; $Q' = \frac{13}{16} Q''$; e perciò $Q : Q' : Q'' :: \frac{5}{8} : \frac{13}{16} : 1 :: 10 : 13 : 16$.

2.° La portata cresce quando si arma un foro con un tubo inclinato dall' alto al basso, perchè allora la velocità del fluido effluente non è più dovuta all' altezza del livello del fluido sopra il centro del foro nel recipiente; ma all' altezza del livello del fluido sopra il centro dell' apertura estrema del tubo (787).

3.° La quantità di fluido, che esce in un dato tempo, e con una data velocità essendo proporzionale all' ampiezza dell' apertura, d' onde sgorga (778), è chiaro, che si aumenta la portata di un foro armandolo d' un tubo conico divergente: e chiamata b l' apertura del foro, e b' la bocca del tubo, l' aumento sarà nel rapporto di $b : b'$. Bisogna peraltro, che b' non sia troppo più grande di b, perchè se ciò fosse, l' acqua emergente non empirebbe il tubo, e ne abbandonerebbe le pareti.

4.° Perchè si ottengano dall' aggiunta di un tubo al foro i vantaggi notati, conviene, che la lunghezza di esso tubo sia eguale a circa 2 in 3 diametri del foro; perchè facendolo più corto, dovrà esser b' poco più grande di b, altrimenti l' acqua non seguirebbe le parti del tubo, e non ne empirebbe tutta la cavità; e facendolo più lungo, la velocità

dell' acqua effluente si diminuirebbe per il notabile attrito (806).

Consulteranno le Opere dei Pratici, il 2.° tomo della Idrodinamica del Bossut, e le sperienze fatte a Tolosa dal D' Aubuisson, e da Castel (*V. An. de Ch. et de Phy* T. 43) quei, che vorranno delle ulteriori notizie tanto d' esperienza, quanto di calcolo su questo importante articolo.

Dell' urto de' Fluidi.

809. Frattanto passiamo a considerare gli ostacoli, che l' acqua incontra muovendosi per gli alvei, e pei condotti.

Questi ostacoli sono le asprezze, tortuosità, e simili, che trovansi nel fondo, e nelle pareti dell' alveo, e dei condotti. L' acqua scorrendo urta contro di essi, come avviene generalmente nell' urto, perde una porzione della sua celerità. Ma la dottrina dell' urto dell' acqua, e dei fluidi in generale è così importante, che noi dobbiamo ragionarne qui con qualche diffusione.

810. Egli è molto difficile di determinare le leggi dell' urto dei fluidi in una maniera esatta, ed applicabile alla pratica, mancando su tal soggetto una teorica sodisfaciente del tutto. Nella ipotesi comunemente seguita si suppone, che tutte le particelle, o filetti paralleli urtando il solido non si impediscan tra loro in alcun modo. Ora ciò generalmente è falso, e porta talvolta a resultati sì lontani dal vero, che non possono ammettersi in verun conto. Per altro siccome questa ipotesi è molto semplice; facilita l' intelligenza d' alcune Opere sull' Architettura navale, cui serve di base, e può impiegarsi senza notabile errore in calcoli relativi alle macchine, che si muovono per mezzo di rote urtate

da qualche corrente d' acqua, o d' aria; così noi abbiam creduto doverla seguire, tanto più, che all' occasione possono con particolari esperimenti correggersene agevolmente i resultati men veri.

811. Prima d' inoltrarci nell' esposizione di questa dottrina, avvertiremo, che ha luogo il ragionamento medesimo sia che un fluido in quiete venga urtato da un solido in moto, sia che un fluido in moto urti un solido in quiete.

812. Ciò premesso, la massa fluida CN (*Fig.* 71) urti normalmente il solido AD in quiete per sì fatta guisa, che le particelle contenute nella grossezza infinitesima CB della porzione, o dello strato urtante nel tempo piccolissimo t esercitino tutte la loro azione sul solido; cioè in guisa, che il solido nel tempuscolo t si trovi insinuato nella grossezza CB. Questa grossezza potrà considerarsi come la misura dello spazio percorso nel detto tempo infinitesimo dalla massa urtante, cioè sarà $CB = s$; e siccome per un tempo piccolissimo ogni moto è uniforme, sarà $s = ct$ (76). Ora detta f la forza urtante, m la porzione di CN, che urta il solido, avremo $f = mc$ (75); ma detta g la gravità specifica del fluido, v il volume della porzione urtante, abbiamo $m = g\ v$; dunque $f = cgv$ Essendo poi v eguale al prodotto della base urtante per la sua altezza s ($= ct$), e la base urtante eguale alla superficie urtata $AD = b$; sarà $f = cg \times bct = bc^2gt$. E se un' altra superficie solida b^1 sia urtata da un altro fluido della gravità specifica g^1 nel tempo istesso con una celerità $= c^1$, sarà $f^1 = b^1\ c^{12}\ g^1\ t$; onde $f : f^1 :: bc^2g : b^1c^{12}g^1$.

813. Se il solido, che abbiamo supposto in quiete sia in moto, varierà l'espressione di f secondo il senso,

in cui esso si muove. Se si muove nel senso stesso, che il fluido, bisogna dalla celerità del fluido sottrarre la celerità k del solido, onde sarà $f = bgt \times (c - k)^2$; se si muove in senso opposto, bisogna con quella sommar questa; onde sarà $f = bgt\,(c + k)^2$.

* 814. Tutto ciò per il caso, che i piani siano urtati normalmente dai fluidi. Supponiamo ora, che mentre il fluido MN (*Fig.* 72) urta normalmente il piano AB colla celerità c, il fluido YZ urti obliquamente il piano CD coll' angolo d' incidenza RCD $= n$, e colla celerità c'. Detto b il piano AB, b' il piano CD, g la gravità specifica del fluido MN, g' quella del fluido YZ, si rappresenti c' per IG. Decomposta IG nelle due HI normale, GH parallela al piano CD, la sola HI urta il piano, e sarà HI $=$ IG *sen.* IGH $= c'$ *sen.* n. Detti dunque f, f' gli urti contro AB, CD, sarà $f : f' :: bc^2g : b'c'^2g'\ sen^2.\ n$; analogia, che esprime il rapporto dell' urto diretto all' urto obliquo. Che se si paragonino fra loro due urti obliqui f', f'', avremo $f' : f'' :: b'\ c'^2\ g'\ sen.^2\ n : b''\ c''^2\ g''\ sen'^2.\ n'$.

* 815. E se invece del piano AB si consideri il piano DR in modo, che questo piano, e l' altro DC siano l'uno direttamente, l' altro obliquamente urtati dal medesimo numero di filetti fluidi, detta l la larghezza eguale d' ambedue, onde si abbia $b' = \text{DC} \times l$; $b = \text{DR} \times l = \text{CD}\ l\ sen.\ n$, avremo $f : f' :: \text{CD}.\ l.\ sen.\ n : \text{CD}.\ l.\ sen.^2\ n :: 1 : sen.\ n$.

816. Dopo tutto ciò, se sia data la misura, o quantità assoluta di un urto di un fluido, potrà dedursene la quantità d' un altr' urto simile. Suol prendersi per unità di misura l' urto perpendicolare contro un dato piano immobile. Il Bossut dice, risultar dall' esperienza, che l' urto normale, e diretto d' un fluido qualunque contro un piano in quiete è sensibilmente eguale al peso d' una colonna di questo fluido, che abbia per base la superficie urtata, e per altezza l' altezza dovuta alla celerità, con cui urta (777). Trovasi nell'Ope-

ra di Bouguer (*Manoeuvre des Vaisseaux*) una tavola, nella quale data in piedi la velocità in 1", si calcola in libbre, ed once l'urto dell'acqua contro una superficie piana d'un piede quadrato. In seguito il Signor Zuliani ha trovato con replicati sperimenti, che una lastra esposta all'impeto di una vena d'acqua corrente, riceve un urto eguale al peso d'un cilindro, che abbia per base la superficie urtata, per altezza il doppio dell'altezza dovuta alla celerità, se essa lastra ha un ampiezza notabilmente maggiore di quella della vena; di $\frac{4}{3}$ di detta altezza, se l'ampiezza della lastra, e della vena sono sensibilmente eguali. Il Sig. Morosi poi ha trovato, che si può notabilmente accrescere l'effetto della percossa contro questa lastra contornandola con un orlo rilevato tutto all'intorno; e il Sig. Venturoli ha calcolato (*Elem. di Mecc. e Idrau. T.* 2 *p.* 287), che l'aggiunta di quest'orlo può ridur l'urto eguale al peso d'un cilindro fluido, che abbia la base eguale alla superficie urtata, e l'altezza eguale al quadruplo di quella dovuta alla celerità.

817. Per fare ora un' applicazione delle dottrine sopra stabilite, supponiamo, che sia esposta all'urto del fluido MN la sfera, o emisferio ABD (dissi sfera, o emisferio, perchè l'urto contro una sfera si riduce al solo urto contro un emisferio, com'è evidente).

Sia questo emisferio generato dalla rivoluzione del quadrante ABC (*Fig.* 73) intorno al semiasse CA. Si tirino le ordinate infinitamente vicine PG, pg, e il raggio CP. Sia $PG = y$; $CG = x$, $CP = r$. È evidente, che la zona FHP elemento della superficie sferica, e descritta dall'archetto Pp è urtata obliquamente, mentre la zona elementare LNgGO generata nel cerchio OLgG dalla lineetta $Gg = dx$ sarebbe urtata normalmente da uno stesso numero di filetti fluidi. Abbiamo dunque il caso contemplato nel n.° 815, e conse-

guentemente, detti df, df' gli urti infinitesimi ricevuti dalle zone LNgGO, FHP, e detto n l'angolo del segmento GPp, avremo $df : df' :: 1 : sen.\ n. :: CP : PG :: r : y$; onde $df' = \frac{ydf}{r}$. Ora df è eguale al piano LNGO urtato normalmente (812) moltiplicato per il fattore c^2gt, che nel calcolo si tralascia per brevità; ed essendo LNGO la differenziale del cerchio OLgG $= \pi x^2$, si esprime per $2\pi x dx$. Dunque sostituendo, $df' = \frac{2\pi y x dx}{r} = \frac{2\pi x dx \sqrt{(r^2 - x^2)}}{r}$ urto normale a Pp, o sia secondo PC.

S' indichi ora quest' urto colla linea PS, e si risolva nelle due forze PT, ST respettivamente normali. È chiaro, che la sola PT concorre all' urto secondo PG, rimanendo TS distrutta da una forza eguale, ed opposta nell'altro quadrante. I triangoli simili PCG, PST danno PC $(=r)$: PG $(=y)$ :: PS $\left(= \frac{2\pi y x dx}{r}\right)$: PT $= df'' = \frac{2\pi y^2 x dx}{r^2}$ $= 2\pi x dx - \frac{2\pi x^3 dx}{r^2}$; onde $f'' = \pi x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2r^2}\right)$ senza costante, perchè fatto $f'' = 0$, tutto svanisce. Questo pertanto è l' urto del fluido contro il segmento FAP; e se si faccia $x = r$; l' arco AP diverrà AB, e si avrà $f'' = \frac{1}{2}\pi r^2$ urto contro l' emisferio nella direzione del fluido. Dunque l' urto d' un fluido contro una sfera è eguale all' urto normale contro la metà del cerchio massimo πr^2 della sfera stessa.

E qui si noti, che se si volesse l' urto normale a Pp, o secondo la direzione PC, converrebbe integrare l' espressione $df' = \frac{2\pi x dx \sqrt{(r^2 - x^2)}}{r}$, e si avrebbe $f' =$ $\frac{-2\pi\sqrt{(r^2 - x^2)^3}}{3r} + cost.$; e siccome l' urto manca, quando manca l' arco AP, e perciò $cost. = \frac{2}{3}\pi r^2$; così $f' = \frac{2}{3}\pi r^2 - \frac{2\pi\sqrt{(r^2 - x^2)^3}}{3r}$ urto contro la superficie FAP; e facendo $x = r$; $f' = \frac{2}{3}\pi r^2$ urto contro l' intero emisfero eguale all' urto normale contro $\frac{2}{3}$ del cerchio massimo πr^2.

818. All' urto è eguale, e contraria la resistenza del corpo urtato (70). Dunque tutto quello, che si è detto dell' urto dei solidi, e dei fluidi si può applicare alla resistenza, che i fluidi presentano al moto dei solidi, che gli traversano, indicando le resistenze con quelle formule, con cui abbiamo indicati gli urti.

Ora un solido può muoversi attraverso a un fluido orizzontalmente, verticalmente, e obliquamente; noi per altro considereremo soltanto il moto orizzontale, e verticale.

819. Muovasi orizzontalmente in un fluido della gravità specifica g un solido, che abbia la massa $= m$, la superficie, che va contro il fluido espressa per b, e la celerità iniziale per C. La resistenza, che il solido incontra nel fluido è una forza ritardatrice, che si oppone al suo moto rappresentata per $f = bc^2gdt$, essendo infinitesimo il tempo (812). Dunque per ciò, che fu detto ai num. 93, 94 avremo $f = m\varphi dt = -mdc = bc^2gdt$, ovvero $\frac{bgdt}{m} = -\frac{dc}{c^2}$, e integrando $\frac{bgt}{m} = \frac{1}{c} + Cost.$ E siccome in principio del moto quando la resistenza è nulla, $c = C$, $Cost. = -\frac{1}{C}$; e perciò l' integrale completo sarà $\frac{bgt}{m} = \frac{1}{c} - \frac{1}{C}$; d' onde $c = \frac{Cm}{bCgt+m}$.

820. Abbiamo parimente (93) $dt = \frac{ds}{c}$. Sostituendo perciò questo valore nell' equazione $bc^2gdt = -mdc$, avremo $\frac{bgds}{m} = -\frac{dc}{c}$, e integrando $\frac{bgs}{m} = -Lc + cost.$ E siccome nel principio del moto, quando $s = 0$, $C = c$, avremo $cost. = LC$; onde $\frac{bgs}{m} = LC - Lc = L\frac{C}{c}$; e sostituendo il valore di c trovato sopra, avremo

$$(a)\ \frac{bgs}{m} = L\left(\frac{bCgt}{m} + 1\right); s = \frac{m}{bg}L\left(\frac{bCgt}{m} + 1\right).$$

Che se l' equazione (a) riducasi tutta logaritmica moltiplicandone il primo termine per il logaritmo e, che si suppone un numero, che abbia per logaritmo iperbolico l' unità, si avrà

$$\frac{bgs}{m} Le = Le^{\frac{bgs}{m}} = L\left(\frac{bCgt}{m} + 1\right);$$

$$\text{onde } t = \frac{m}{bCg}\left(e^{\frac{bgs}{m}} - 1\right).$$

821. ~~Il moto~~ verticale può farsi d' alto in basso, e di basso in alto. Facciasi primieramente d' alto in basso. Dette g, Γ le gravità specifiche, P, e p i pesi del fluido discacciato, e del solido immerso, essendo eguali i volumi dell' uno, e dell' altro, avremo $g : \Gamma :: P : p$ (49, 52); $P = \frac{gp}{\Gamma}$; e il peso residuo del solido immerso $q = p - \frac{gp}{\Gamma}$ (733). Ma nel tempo di 1", e nel vuoto, detta G la forza acceleratrice di gravità, si ha la forza motrice di gravità (94) $f = Gm = \frac{G}{g} p$, sostituendo il peso alla massa (49). Dunque nel tempo dt, e nel fluido sarà $f = \frac{G}{g} qdt = Gdt\left(\frac{p}{g} - \frac{p}{\Gamma}\right) = Gpdt\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{\Gamma}\right) = hpdt$, fatto $G\left(\frac{1}{g} - \frac{1}{\Gamma}\right) = h$.
La resistenza r poi, che il fluido presenta al solido è bc^2gdt. Queste due forze, che agiscono sul solido, potendosi considerare come due urti, o resistenze, saranno tra loro come i quadrati delle celerità, che imprimono al solido (812). Detta pertanto k la celerità relativa alla forza $hpdt$, avremo $hpdt : bc^2gdt :: k^2 : c^2$; e perciò $k^2 = \frac{hp}{bg}$, e $bc^2gdt = \frac{hc^2pdt}{k^2} = r$. Dunque poichè r si oppone ad f, la forza residua acceleratrice, con cui il solido scende, sarà $f - r = hdbt - \frac{hc^2pdt}{k^2} = pdc$ (94, 75); $k^2dc = (k^2 - c^2)\,hdt$, on-

de $hdt = \frac{k^2 dc}{k^2 - c^2}$; $ht = \frac{k}{2} \times L \frac{k + c}{k - c}$ senza costante, perchè quando $t = 0$; $c = 0$. Dunque $t = \frac{k}{2h} \times L \frac{k + c}{k - c}$.

822. Parimente poichè $dt = \frac{ds}{c}$ (92), sarà $\frac{hds}{c} = \frac{k^2 dc}{k^2 - c^2}$; $hds = \frac{k^2 cdc}{k^2 - c^2}$; $2hs = k^2 [Cost. - L (k^2 - c^2)]$.

E siccome nel principio del moto, quando $s = 0$; $c = 0$, sarà $Cost. = Lk^2$; onde $2hs = k^2 (Lk^2 - L [k^2 - c^2]) = k^2 L \frac{k^2}{k^2 - c^2}$. Dunque

$$1.^\circ\ s = \frac{k^2}{2h} L \frac{k^2}{k^2 - c^2}.$$

823. 2.° Riducendo logaritmiche le due parti dell' equazione, come sopra (820)

$$L \frac{k^2}{k^2 - c^2} = \frac{2hsLe}{k^2} = L e^{\frac{2hs}{k^2}} ;$$

e levando i logaritmi,

$$e^{\frac{2hs}{k^2}} = \frac{k^2}{k^2 - c^2} ; \text{ onde } c = k \sqrt{\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2hs}{k^2}}} \right)}.$$

824. I metodi stessi, coi quali abbiamo determinati gli accidenti del moto verticale all' ingiù di un solido attraverso di un fluido ci condurranno a determinare quelli del moto verticale all' insù. Si osservi, che in questo caso e la gravità, e la resistenza cospirano a ritardare il moto, ondo si ha $hdt = - \frac{k^2 dc}{k^2 + c^2}$, e si operi come nei nn. precedenti.

825 Ciò basti intorno all' urto, e alla resistenza dei fluidi. S' avverta per altro, che le sole primarie deduzioni dalle formule dei nn. 812, e segg. si trovano sufficientemente corrispondenti alla pratica. Le altre tutte e perchè le abbiamo fondate sopra un' ipotesi non vera generalmente, e

perchè abbiamo trascurati diversi elementi, onde non le rendere troppo complicate, debbono sempre esser corrette con particolari sperimenti, e potranno vedersi nell' Idrodinamica del Bossut i metodi per eseguirli.

Teorica dei Fiumi.

* 826. I ragionamenti teorici, ed il calcolo si adattano difficilmente alla dottrina dei fiumi; e se vi si adattano, servono piuttosto a indicare degli errori da evitarsi, che delle verità generali da abbracciarsi. Tutta, o quasi tutta dipende questa dottrina dall' osservazione, e dall' esperienza per ogni caso particolare; onde nulla, o quasi nulla può dirsene in generale.

* 827. Distinguonsi i fiumi in *liberi*, ed *impediti*. Si chiaman liberi quelli, che non incontrano nel loro corso cagione alcuna valutabile capace di ritardarne il moto naturale; impediti quelli, il corso dei quali è alterato da qualche cagione, come da scabrosità nel fondo, e nelle rive, da tortuosità, da ammassi di pietre, di arena, ec. Or siccome non vi è forse alcun fiume, in cui non concorrano molti insieme di questi impedimenti, così potrebbe per avventura sembrare inutile l' accennata distinzione. Ma vi sono spesso delle particolari circostanze, che ci autorizzano a riguardare i fiumi come liberi, per quanto siano realmente impediti. In fatti gli ostacoli permanenti, ed uniformi, che agiscono per tutto il fiume equabilmente, per quanto lo privino della libertà assoluta, li lasciano una libertà relativa, per cui scorre con una celerità proporzionale a quella, colla quale scorrerebbe, se fosse tolto ogni ostacolo: e quando un fiume è libero anche relativamente, è soggetto alle regole, che si sogliono prescrivere per i liberi assolutamente. Oltre di che può supporsi impunemente libero un fiume, che naturalmente è impedito, fingendone ristretta la sezione dentro tutti gl' impedimenti delle rive, e del fondo, e trascurando l' acqua, che ristagna, o scorre lentamente al di là di questi limiti. D' altronde qualor si rifletta, che gli antichi Idraulici fondarono le loro teoriche sulla natura dei fiumi liberi, le applicarono quasi indistintamente agli impe-

diti, e ciò non ostante le loro grandiose operazioni idrometriche sortirono il più delle volte un fortunato successo, siamo indotti a sospettare, che forse vien trascurato nella teorica qualche elemento, che ne compensa in molti casi il difetto, e per cui le dottrine dei fiumi liberi possono trasportarsi senza pericolo agli impediti. Noi diremo poche cose degli uni, e degli altri.

* 828. Quando una massa d'acqua ha la superficie orizzontale, è in equilibrio (701). Dunque, quando ella è in moto avrà la superficie inclinata. Ora due cagioni possono mettere in moto una massa d'acqua, la pressione delle parti superiori, e l'inclinazione del piano, su cui ella posa. Perciò il moto dell'acqua può aumentarsi, o aumentandone la pressione, cioè l'altezza della massa premente, o aumentando l'inclinazione dell'alveo, per cui scorre. Rilevasi per altro dalle esperienze, e osservazioni riferite nei nn. 780-87, 811 dell'Idrodinamica del Bossut, che nei fiumi quest'aumento di moto non è precisamente proporzionale nè all'aumento della pressione, nè all'aumento dell'inclinazione dell'alveo.

* 829. Per calcolare la forza di un fiume, bisogna determinarne la celerità, e la portata, che ne sono gli elementi (75).

La determinazione della celerità media dei fiumi è un problema sì difficile, che non si è potuto per anche risolvere generalmente. Alcuni Autori Idraulici dopo il Guglielmini hanno opinato, che la celerità dei fiumi dipenda unicamente nei primi tronchi, e tra i seni delle montagne dalla declività del fondo; nelle pianure dall'altezza del corpo d'acqua sovrastante ad ogni particella; presso la foce dall'inclinazione della superficie. Per misurarne poi la quantità usano il seguente metodo. Presa una retta orizzontale, che diremo O, la quale rappresenti la velocità superficiale, si alza da un'estremità di O una verticale, che esprima l'altezza dovuta a questa celerità: quindi descritta una parabola, che abbia il vertice nell'estremità superiore della verticale, e passi per l'altra estremità dell'orizzontale, si dice; che la velocità dell'acqua in qualunque punto è rappresentata dall'ordinata corrispondente della parabo-

la. Fondasi questa costruzione sul seguente ragionamento. L'acqua uscendo da un foro fatto in una parete verticale d'un recipiente qualunque ha una velocità, che può rappresentarsi per l'ordinata d'una parabola, che abbia il vertice nella superficie dell'acqua del recipiente (782). Considerando una sezione verticale del fiume come la parete d'un recipiente, nella quale sia un numero infinito di piccoli fori, per cui l'acqua venga cacciata dal peso della colonna superiore, si esprime la velocità prodotta da questa pressione in ogni punto per l'ordinata, che li corrisponde. Ma poichè così la velocità alla superficie sarebbe nulla, mentre debbe essere proporzionale ad O, si alza tanto il vertice dalla parabola, che all'estremità superiore della sezione corrisponda l'ordinata O, che rappresenta la velocità superficiale.

* 839. Ora il Sig. Com. Paoli nel precitato opuscolo ha dimostrato, 1.° che è erronea l'accennata opinione sulla cagione della celerità dell'acque correnti, perchè contro i principj della Meccanica si deduce dalla sola più forte, e non da tutte le cagioni acceleratrici. 2.° Che è affatto arbitrario, ed inesatto il metodo di misurarla, e perchè non conoscendosi la vera cagione della celerità, che dipende da tanti incalcolabili elementi, può dirsi con egual ragione, che ella sia proporzionale alle ordinate di una parabola, come di qualunque altra curva; e perchè la dottrina dello sgorgo dell'acqua dai fori di un recipiente nell'aria, o nel vuoto, dove non incontra, che poca, o punta resistenza non può applicarsi alle sezioni dei fiumi, dove incontrando una resistenza eguale alla pressione, che la spinge, non può concepire velocità alcuna.

È vero, che nei luoghi più vicini alla superficie, ed in un letto molto regolare la scala delle velocità potrà forse avvicinarsi alla parabola; ma è altresì vero, che la scala parabolica, non è provata; che il ragionamento, da cui si è fatta dipendere è del tutto falso, e pieno delle più grossolane contradizioni; e che la vera scala delle velocità dei fiumi è tra le cose desiderate.

* 831. Quello, che si può dedurre di più importante dalle osservazioni, e dalle proprietà generali dei fluidi per

rapporto alla celerità dei fiumi, si riduce a ciò, che segue. (*V. Paoli l. c.*).

1.° La velocità d' una particella fluida in un dato punto del fiume è il risultato di tutte le accelerazioni, e resistenze, che la medesima ha sofferte in tutto il suo corso dall'origine del fiume fino al punto dato.

2.° Per quanto non si conosca il rapporto, che l'inclinazione del pelo di un fiume (solo contrassegno sicuro (701), che l'acqua si muove) ha col fondo, pure sembra, che quella sia specialmente determinata dalle condizioni di questo in modo, che divenga maggiore, o minore, secondo che a circostanze pari crescono, o diminuiscono le resistenze del fondo.

Tutti i corpi naturalmente inerti tendono (40) a mantenere per quanto possono invariata quella celerità, che loro è stata impressa; ma sono continuamente ritardati dagli ostacoli, che s' oppongono al loro moto. Ora i solidi non son capaci da loro stessi di recuperare quella velocità, che comunque han perduta. Ma i fluidi han sortito dalla natura la proprietà di riacquistare la velocità, che loro vien tolta dagli ostacoli, e dalle resistenze, che incontrano; e ciò mediante l' inclinazione della loro superficie. Quando un fluido è in qualche modo ritardato nel suo corso, esso coll' accrescere l' inclinazione del suo pelo tende a riacquistare quella velocità, che le resistenze tendono a toglierli. Ciò manifestamente si vede sotto gli archi dei ponti; e dalle proprietà generali dei fluidi si deduce, come naturalmente succeda. Sia CD il pelo permanente di un fiume (*Fig.* 74), e siano A, B due particelle d' acqua situate a qualunque profondità nella medesima orizzontale. È chiaro, che le due colonne aquee AC, BD, che costituiscono come un tubo comunicante DBAC stanno in equilibrio, e si premono egualmente; perchè, se ciò non fosse, l' acqua dovrebbe sollevarsi in quel braccio, che preme meno; lo che per ipotesi non succede, essendo il pelo CD permanente. Se ora la particella A soffra qualche resistenza, questa si potrà considerare come una forza attiva applicata alla medesima; e per le proprietà generali dei fluidi comunicandosi questa forza equabilmente per ogni verso, la particella B soffrirà una pressione,

per la quale sarà turbato l' equilibrio tra le colonne AB, CD. Laonde perchè si ristabilisca questo equilibrio, bisognerà, che cresca l'altezza della colonna BD tanto, quanto conviene, onde con l' aumento del peso ella possa contrabbilanciare l'aumento della pressione della particella A (726.3.°). L' acqua sopravveniente somministra la facilità di questo aumento d' altezza, e il pelo diviene più inclinato, come sarebbe CE. Si spiega nella stessa guisa anche quell' increspamento, che sempre si osserva sulla superficie d' un fiume, il quale nasce senza dubbio per le piccole irregolarità, che sono ovunque sparse sul suo fondo.

* 832. Del resto qualor si rifletta, che tutti gli artifizj dell' Algebra non bastano a risolvere anche per approssimazione il problema, in cui si cerca il moto d' un fluido, che scorre in un canale del tutto uniforme, e regolare, nel caso ancora, in cui si prescinda da qualunque resistenza; pare, che vi sia tutto il fondamento di credere, che non si arriverà mai a trovare la diretta, e general soluzione di un problema più intralciato infinitamente, qual è quello del moto dei fiumi, come sono in natura. Per lo che l' unico partito, che rimane è quello di procurarsela indirettamente per mezzo di esperimenti eseguiti senza prevenzione, e con macchine non fallaci. Ed anzi che cercare la *scala delle velocità*, che forse difficilmente si troverebbe in un dato fiume, e quand' anche pur si trovasse, forse non potrebbe applicarsi ad un altro, in cui il sistema delle resistenze fosse diverso; sarà più opportuno il rintracciare il rapporto della velocità media alla superficiale. Ridotta la questione a maggior semplicità, sarà più facile di trovare un limite in eccesso, o in difetto, che abbia luogo in qualunque fiume. Nella speculazione sembra più pregevole il ritrovamento della scala delle velocità, ma nella pratica basta solo di conoscere il limite della velocità media per regolare quelle operazioni idrometriche, che richiedono la cognizione prossima al vero della portata dei fiumi.

833. Ora diversi metodi, e strumenti possono usarsi per misurare la velocità media d' un fiume; e molti se ne trovan descritti nel capitolo XIII. del Tomo 2.° dell' Idrodinamica del Bossut. Noi ne accenneremo uno, che è tra i

più semplici, ed è fors' anche il più spedito, e il men soggetto a notabili inesattezze. È questo conosciuto sotto il nome di *Sifone Idrometrico* del Pitot (*Mém. de l' Ac. des Sci. de Paris an* 1732), ed è un tubo EKLI piegato in K ad angolo retto (*Fig.* 75). S' introduce questo tubo verticalmente nel fiume volgendone in principio la bocca E secondo la corrente. Si solleva tosto dentro di esso l' acqua fino al livello del pelo del fiume. Posto allora dentro al tubo un galleggiante, su cui sia verticalmente fissata una sottil verga divisa in minute parti eguali, si volge la bocca E contro la corrente. L' urto dell' acqua, che corre, contro l' acqua stagnante nel tubo, fa sollevare il livello di questa, per es. in I; e le divisioni della verga, che va sollevandosi anche essa, mostrano di quanto si sollevi l' acqua dentro del tubo sopra il pelo del fiume. S' immerge il tubo in diverse parti di diverse sezioni, e ad ogni immersione si nota la misura di LI Ora l' elevazione LI dell' acqua, come è prodotta dall' nrto della corrente contro il piano E, così serve a misurare la quantità di quest' urto. Ma l' altezza della colonna, che misura l' urto, è eguale all' altezza dovuta alla celerità della corrente (816). Dunque i diversi valori delle altezze LI faran conoscere le diverse celerità delle correnti ne' diversi punti, e nelle diverse profondità del fiume. Sommando la serie delle celerità trovate nelle ripetute osservazioni, e dividendone la somma s per il numero n delle osservazioni, avremo la celerità media del fiume espressa per $k = \frac{s}{n}$.

* 834. Determinata la celerità media di un fiume, se ne trova immediatamente la *portata*, o la quantità q d' acqua, che porta in un dato tempo. Questa quantità formando un prisma, che ha per base la sezione b del fiume, e per altezza la celerità media k, sarà $= bk$. Se il fiume sia in istato permanente, le sezioni anche diverse danno eguali portate in egual tempo, poichè se dessero portate diverse, l' acqua continuamente si alzerebbe, o si abbasserebbe; il che ripugna all' ipotesi dello stato permanente. Dunque per conoscere la portata di un fiume nel suo stato di permanenza, basta determinare la celerità media in una sola sezione

libera, e viva. Diconsi *libere, e vive* quelle sezioni dei fiumi, che essendo regolari, non ne alterano sensibilmente il moto delle acque.

* 835. La diversa portata di un fiume fa, che esso urti con forza diversa contro il fondo, e le sponde. Se la tenacità del terreno nelle sponde, e nel fondo fa equilibrio all' urto della massima portata in tempo di piena, il fiume ha una *forza esatta*. Se la forza è maggiore della resistenza del fondo, e delle rive, si dice *troppo grande*, se minore, *troppo piccola*. La forza troppo grande corrode il fondo, e le sponde. La troppo piccola fa, che il fiume depositi e sassi, e ghiaie, e rena, e le altre cose, che l' acqua di fiume suol trasportare. L' esatta mantiene il *letto stabile*. La forza esatta non si trova quasi mai nei fiumi; onde quasi sempre i fiumi corrodono, o depositano, ed hanno istabile il letto.

* 836. Ora la celerità, e perciò la forza di un fiume è tanto più o men grande, a circostanze pari, quanto più o meno alta ne è l' acqua, e il fondo più o meno inclinato. Dunque un fiume più scaverà, e meno depositerà, quando più ne sarà alta l' acqua, e più grande il declivio: e per lo contrario quando trasporterà minor quantità d' acqua, e quando meno ne sarà inclinato il fondo dell' alveo, meno scaverà, o più depositerà. Le osservazioni non lascian dubbio su ciò. Se nelle pianure i fiumi non abbiano l' acqua molto alta permanentemente, fanno delle abbondantissime deposizioni.

* 837. Ma queste deposizioni, e queste corrosioni come si fanno sempre irregolarmente; così forman dei seni, e delle tortuosità nelle rive, dei gorghi, e dei ridossi nel fondo. Queste irregolarità presentano un ostacolo al libero movimento dell' acqua, e ne accrescon grandemente l' attrito. L' attrito poi così accresciuto produce diversi interessantissimi effetti, e segnatamente

* 838. I. La celerità dei fiumi per quei tratti, in cui l' alveo non soffre variazioni o di ampiezza, o di declivio, ec. si mantiene uniforme, e non si aumenta, come generalmente quella dei gravi, che muovonsi per un piano inclinato, per-

chè l'attrito distrugge l'aumento prodottone dalla inclinazione del letto.

* 839. II. Siccome l'attrito si sente dall'acqua tanto più, quanto più ella è vicina alla terra, così l'acqua presso le sponde incontra maggior resistenza, che nel mezzo, e perciò si muove con minor forza.

Da ciò nasce, che

1.° Ridotto il pelo d'un fiume allo stato permanente in tempo di piena, le colonne aquee d'una stessa sezione non possono aver tutte una stessa altezza. Poichè premendosi ed equilibrandosi queste colonne co' respettivi pesi proporzionali alle altezze, e colle forze impresse loro dalle resistenze, che incontrano, come avvertimmo sopra (831), dove la resistenza è minore dee l'altezza esser maggiore. Perciò le colonne del filone debbono esser più alte, che quelle vicine alle sponde; e quindi la superficie d'un fiume dee conformarsi in una curva convessa da sponda a sponda. Ciò si osserva sempre nei fiumi gonfi, eccetto il caso, in cui per l'opposizione di un ostacolo alla corrente il ritardo si renda più sensibile nell'acqua men celere presso le sponde, la quale perciò elevandosi più, che quella del mezzo riduce concava la curva della superficie.

2.° Le deposizioni si fanno in maggior copia presso le sponde, che sotto al filone.

* 840. III. Le deposizioui, che i fiumi fanno in conseguenza dell'attrito divengono cagioni esse stesse di nuovo attrito, e quindi di nuove deposizioni, per cui il letto dei fiumi continuamente sollevandosi fino molto al di sopra delle campagne adiacenti, essi minacciano pericolose inondazioni, e spesso arrecano danni gravissimi.

* 841. Molto interessanti sono le dottrine relative ai mezzi opportuni per impedire, e per rimediare i danni, che si arrecan dai fiumi. Ma noi non crediamo di doverne far parola, e perchè troppo ne saremmo condotti in lungo, e perchè ci troveremmo impegnati in minute ricerche di pratica, che non debbono aver luogo nel nostro piano. Consigliando adunque gli Studiosi a consultare i libri dei Pratici termineremo con dir poche cose del moto dei fluidi elastici, e delle macchine idrauliche.

Del moto dei fluidi elastici.

* 842. In tutto quello, che abbiamo detto fin qui del moto dei fluidi gli abbiamo supposti incompressibili. Resta, ora che diciam qualche cosa del moto dei fluidi elastici; ma ci limiteremo a considerarne lo sgorgo dai fori infinitesimi, e poc' altro. È noto, e noi l' abbiamo altrove accennato, che nei corpi perfettamente elastici, quali supponiamo, che siano i fluidi, lo sforzo, con cui la elasticità reagisce è eguale, e contrario alla forza di compressione. La qual forza può rappresentarsi per il peso di una colonna, o prisma fluido d' una base b^2 eguale alla superficie premuta, e di un' altezza A tale, che se ne abbia un carico capace di far equilibrio alla forza elastica F oppostali. Per lo che si avrà generalmente nei fluidi elastici $F = A\ b^2$; e il valor di A sarà vario secondo la varia natura dei fluidi, che si suppongono in equilibrio coi compressi. Così il fluido compresso essendo l' aria densa come suol essere sulla superficie terrestre, dovrà farsi $A = 28$ pol., se per fluido comprimente si prenda il mercurio; $A = 32$ piedi, se si prenda l' acqua, ec.

Parimente è noto, che generalmente nei fluidi elastici le forze elastiche, a circostanze pari d' altronde, sono proporzionali alle densità.

* 843. Sia un fluido elastico compresso in un vaso in modo da avere un' egual densità in tutta la sua estensione; e supponiamo, che si apra nelle pareti un piccol foro K, per cui possa questo fluido sgorgar nel vuoto. Sia F la elasticità, Q la densità del fluido, C la celerità al principio dello sgorgo; q, c la densità, e la velocità dopo un tempo t; M la massa sgorgata nel primo, m nel secondo egual tempo, avremo $Q \cdot F :: q : \frac{Fq}{Q} = f$ elasticità dopo il tempo t. Ora $F : \frac{Fq}{Q} :: MC : mc$. D' altronde essendo le masse come i prodotti dei volumi nelle densità, e i volumi come $KC : Kc$; avremo $M : m :: Q.KC : q.Kc :: QC : qc$. E quindi $F : \frac{Fq}{Q} ::$

$QC^2 : qc^2$; $C = c$, cioè il fluido sgorga con una celerità, che si mantiene continuamente eguale.

* 844. Non così, se il fluido dovrà passare in un recipiente pieno d' un fluido elastico più raro, qual sarebbe per es. l' atmosfera terrestre. In tal caso, detta D la densità del fluido esterno, R la sua elasticità, e ritenute le altre denominazioni del numero superiore, avremo $F = \frac{QR}{D}, f = \frac{qR}{D}$, essendo le forze elastiche proporzionali alle densità. E siccome alla forza F si oppone dal fluido esterno una resistenza $= R$; così la forza, con cui il fluido sgorga dal vaso sarà in principio $F - R = \frac{QR}{D} - R = \frac{(Q-D)R}{D}$; e dopo un tempo t, $\frac{(q-D)R}{D}$. Onde ripetuto il ragionamento, che sopra, troveremo $\frac{(Q-D)R}{D}, \frac{(q-D)R}{D} :: QC^2 : qc^2$, analogia, la qual dimostra, che essendo $D = Q$, è nulla la velocità iniziale C, e che la celerità $c =$

$$C \times \sqrt{\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}}$$ è nulla, quando diviene $q = D$.

* 846. Egli è poi chiaro, che data la celerità dell' egresso, e l' ampiezza dell' orifizio, si conosce la quantità di fluido; che dee escirne in un dato tempo. Vuolsi per altro avvertire, che anche pei fluidi elastici la portata teorica non è eguale all' effettiva. Le sperienze del Sig. D'Aubuisson mostrano, che quando l' aria esca da un recipiente in virtù d' una pressione qualunque, se l' orifizio è in una sottilissima parete, il rapporto tra la portata teorica, e l' effettiva è 0, 65; rapporto che si riduce 0, 95, se esce per un corto tubo conico poco largo; e se si usino tubi conici bassissimi, o lamine con un foro leggermente conico, la portata sarà di 6 per cento minore dell' effettiva (*V. An. de Ch. et de Phys. T.* 32 *p.* 331).

847. Dopo tutto ciò facilmente si conosce la celerità, con cui una palla MP del peso p è spinta fuori del cannone DB (*Fig.* 69) per l' impulso d' un fluido elastico, o condensato antecedentemente, o istantaneamente sviluppato nello spazio DE. Sia a^2 l' area del cerchio rappresentato da EF, ov-

vero PM. Sia AE $= b$, AP $= x$, c la celerità della palla in P. Se il fluido nello spazio, o sotto il volume DE ha una forza elastica espressa come sopra per $\frac{QR}{D}$, ridotto che esso sia al volume DP, l'avrà espressa per $\frac{QR}{D} \times \frac{a^2 b}{a^2 x} = \frac{bQR}{D.x}$, essendo ella reciproca ai volumi del fluido. A questa forza oppone l'aria una resistenza R, onde la forza effettiva, con cui è espulsa la palla nell'aria verrà rappresentata da $\frac{b\,QR}{D\,x} - R$. Ora dalla dottrina delle forze esposta a suo luogo (93, 94) si deduce, che $pcdc = \frac{b\,QR}{D} \times \frac{dx}{x} - R\,dx$; e integrando $c^2 = \frac{2R}{p}\left[\frac{b\,Q}{D} L\,x - x\right] + \frac{2Cost.}{p}$. E poichè quando $c = 0$; $b = x$; avremo $Cost. = -R \times \left[\frac{bQ}{D} L\,b - b\right]$, e perciò $c^2 = 2R\left(\frac{bQ}{Dp} L\,x - L\,b + \frac{b-x}{p}\right) = 2R \times \left(\frac{b\,Q}{Dp} L\,\frac{x}{b} + \frac{b-x}{p}\right)$. Fatto dunque $x = AB = E$, avremo il quadrato della velocità c della palla nell' egresso dal cannone espresso per $2R\left(\frac{b\,Q}{Dp} L\,\frac{E}{b} + \frac{b-E}{p}\right)$.

* 846. Prima che lasciam di parlare dell' egresso dei fluidi elastici dai recipienti conviene, che rammentiamo un fatto curioso, di cui il Sig. Clement diè notizia poco fa all'Accademia delle Scienze di Parigi. Se un fluido elastico esca dal suo recipiente per un piccol foro in una superficie piana, e al getto fluido s' opponga a piccola distanza dall' apertura un piccol disco di metallo, o d' altra sostanza, esso ne è da principio repulso; ma superata che questa repulsione, approssimandosi molto il disco all' orifizio, il fluido esce per raggi divergenti tra la parete, e il disco; e il disco rimane attratto in modo, che vince l' azione della gravità; onde per quanto non sostenuto non cade, e ci vuole della forza per

distaccarlo, e forse tanto maggiore, quanto più il fluido è condensato nel recipiente. Ciò par, che dipenda da una diminuzione di pressione dal dentro in fuori, che si ha tra gli orli del disco, e la parete, per la qual diminuzione la pressione dell'atmosfera spinge il disco contro la parete, e così lo sostiene. Questa diminuzione di pressione si dimostra ancora colla seguente sperienza. Un tubo curvato ad angolo retto con una estremità s' introduca nello spazio tra la parete e l' orlo del disco, coll' altra estremità in un vaso d'acqua: per la diminuzion della pressione presso il foro si vede l' acqua salire nel tubo spintavi dalla prevalente pressione dell' atmosfera. Fenomeni simili si osservano quando escono e fluidi, e liquidi per tubi conici divergenti all' esterno. Nel T. 36 della Bibl. univ. *p.* 16. è la relazione di questo fenomeno, e la spiegazione datane in una Memoria, che contiene anche molte altre notizie interessanti. Il Sig. Hachette ha ripetute, ampliate, e variate le sperienze del Clement, e ne ha dato conto al pubblico con una Memoria, che è nel T. 35 degli An. di Ch. e Fis. *p.* 34.

Macchine Idrauliche.

* 847. Indicansi con questo nome quelle macchine, in cui l' acqua applicata come una forza meccanica mette in moto uniforme degli argani, delle rote dentate, e in generale delle leve. Ora l' acqua agisce in queste macchine o per il solo urto, o per l' urto combinato col peso. Esamineremo brevemente questi due casi.

* 848. L' acqua urti le tavole, o *Ali* Mm, Oo (*Fig.* 76) rettangolari, ed eguali fissate nella circonferenza della rota ABG, che per quest' urto sia costretta a rotare intorno al suo asse, e vincer così una resistenza. L' urto diretto ricevuto dall' ala verticale Oo è assai maggiore di quello obliquo ricevuto dall' inclinata Mm; per lo che la celerità della rota sarà tanto maggiore, quanto più spesso un' ala verticale sarà esposta all' urto diretto, vale a dire quanto sarà maggiore il numero delle ali, purchè per altro non sia tanto grande da render sì piccola la distanza tra l' una, e l' altra, che l' acqua non possa urtarle liberamente. La sola

esperienza può determinare il numero delle ali, che dee avere una ruota per produrre il massimo effetto, e dalla medesima apparisce, che ad una rota di circa 4, o 5 piedi di diametro convengono tra le 20, e le 24 ali. Se la rota agisce, perchè le ali sono immerse nell' acqua corrente, la loro maggiore estensione gioverà molto al moto ricevendo l' urto da maggior copia d' acqua, e perciò più vigoroso; ma se le ali debbono essere urtate da una data quantità d' acqua incanalata in una corsia, l' ampiezza troppo grande esigendo più ampia corsia, e perciò riducendo l' acqua troppo bassa, ne infievolirebbe molto il moto, onde in tal caso bisogna contentarsi d' una mediocre larghezza.

849. Sia pertanto r la resistenza da vincersi, per es. il peso, che dee sollevar la macchina, c la celerità costante della medesima, g la sua distanza dal centro del moto, o dall' asse di rotazione. Sia k la celerità media dell' acqua, x la celerità della rota; e si cerchi quale debba esser questa celerità, perchè possa vincersi la massima resistenza. Dicasi a la superficie dell' ala, che riceve l' urto diretto f; h la distanza del centro dell' urto dal centro della rota. Sarà $k - x$ la celerità residua dell' acqua (813); rc la quantità di moto della resistenza, che debbe essere un massimo. Supponendo, che un piano qualunque b esposto normalmente all' acqua ne riceva l' urto φ, si avrà (813) $f : \varphi :: a(k-x)^2 : bk^2$; $f = \frac{a\varphi(k-x)^2}{bk^2}$. Ma per l' equilibrio, che ad ogni istante si produce, e si distrugge tra la forza, e la resistenza, dovendo essere eguali i momenti riferiti al centro della rota, abbiamo $rg = fh = \frac{ah\varphi(k-x)^2}{bk^2}$. D' altronde essendo nel moto uniforme le celerità come gli spazj descritti in tempi eguali; e nel nostro caso gli spazj, che son circolari, come i raggi, o le distanze dal centro del moto, sarà $c : x :: g : h$; onde $g = \frac{ch}{x}$; $\frac{rch}{x} = \frac{ah\varphi(k-x)^2}{bk^2}$; $rc = \frac{a\varphi x(k-x)^2}{bk^2}$, che debbe essere un massimo. Differenziando per tanto questa espressione si avrà $\frac{d(rc)}{dx} = \frac{a\varphi k^2 - 4a\varphi kx + 3a\varphi x^2}{bk^2} = 0$;

cioè $x^2 - \frac{4}{3} kx = - \frac{1}{3} k^2$, e perciò $x = \frac{2}{3} k \pm \frac{1}{3} k$. Il segno $+$ non serve, perchè esso darebbe $k = x$, e conseguentemente nullo l' urto; onde il massimo cercato sarà $x = \frac{1}{3} k$; espressione, da cui apparisce, che la rota produce il massimo effetto, quando la sua celerità è $\frac{1}{3}$ di quella dell' acqua.

L' esperienza poco discostandosi in ciò dal calcolo dimostra, che la rota dà il massimo effetto, quando la sua celerità eguaglia $\frac{2}{5}$ di quella dell' acqua.

Se ora si faccia $b = a$, e si sostituisca il valore di x, troveremo la quantità di moto $rc = \frac{a\varphi x(k-x)^2}{bk^2} = \frac{4}{27} \varphi b$. E poichè chiamando q l' altezza dovuta alla celerità x dell' acqua, l' urto diretto (777) si trova $\varphi = aq\gamma$, sarà finalmente il valore del cercato massimo $cr = \frac{4}{27} aqk\gamma$, cioè la rota produce il massimo effetto, quando è capace d' imprimere la celerità k della corrente al prisma d'acqua $\frac{4aq}{27}$.

850. Se dal canale xz cada l' acqua dentro alle cassette MNmn, di cui è guarnita la rota ABD (*Fig.* 77), queste sarà obbligata a muoversi e per l' urto dell' acqua, che cade, e per il peso, che ne gravita contro le pareti delle cassette. Movendosi la rota, si presenteranno successivamente al canale tutte le cassette, che spinte dall' urto, e dal peso dell' acqua contribuiranno tutte successivamente a tenere in moto la rota.

Finchè questa si mantiene meno celere dall' acqua, soffre un' azione e dall' urto, e dal peso della medesima. Ma ridotta ad una celerità eguale continua a muoversi per la sola azione del peso. Può dirsi dell' urto in questo genere di macchine ciò, che per l' altro genere abbiam detto nel numero superiore Per calcolar poi l' effetto del peso supporremo, che la rota si muova uniformemente. Lo sforzo, che l' acqua fa per muover la macchina può sempre ridursi a quello della porzione di corona acquea GghH, che agisce sempre sulla rota nella estensione data GOH, e colla grossezza parimente data Gg; onde tutto si riduce a trovar l' espressione del momento di questa porzione d' acqua.

Vediamo pertanto come si possa trovar questa espressione. Supposta la grossezza della rota impunemente trascurabile rap. porto al diametro, si tirino dal centro C i due raggi CMN, Cmn infinitamente vicini, che determinino la quantità elementare dell' acqua MNmn. Tirinsi le ordinate GF, HV, ME, mP normali all' asse verticale AB. Si abbassi pure la verticale Mrz, che incontri in r l' ordinata mp, e in z il raggio orizzontale CO. Il momento della porzione MNnm d' acqua riferito al centro C può rappresentarsi per $Mm \times MN \times Cz = Mm \times MN \times MP$. Ora i triangoli simili Mrm, MPC danno $Mm \times MP = Pp \times CM$. Dunque $Mm \times MN \times MP = MN \times CM \times Pp$, e $\int Mm\ MN\ .\ MP = \int MN \times Pp\ .\ CM = MN \times CM\ .\int Pp = MN \times CM \times FV$ espressione del momento dell' intera quantità d' acqua GghH. Chiamando D la dimensione orizzontale, o sia la larghezza delle cassette, si ridurrà l'accennata espressione più esatta $D \times MN \times FV \times CM$.

Se pertanto dicasi come sopra r la resistenza, c la sua celerità, g la sua distanza dal centro del moto, C la celerità della rota, a il raggio, avremo $rg = D \times MN \times FV \times a$; e sostituendo come sopra (849) in luogo di g il suo valore $\frac{ac}{C}$, avremo $rc = D \times MN \times FV \times C$.

851. La teorica di queste macchine trovasi diffusamente esposta nell' Idrodinamica del Bossut. Molto utile per quei, che si dirigono alla pratica potrà riuscire l' esposizione di questa teorica; e non minor vantaggio recherà loro un Opuscolo del Sig. Poncelet intitolato *Mémoire sur les roues verticales à palettes courbes, ec.* che trovasi inserito negli An. di Ch. e di Fis. (T. 30.) in cui si propongono delle importanti modificazioni nei metodi comunemente usati nel costruire le ruote idrauliche, e se ne dimostra l' utilità con decisive sperienze. Il nostro piano non ci permette di trattenerci ulteriormente su questo soggetto.

CAPITOLO III.

Dei fenomeni presentati dai tubi capillari.

852. Dopo di avere nei due precedenti Capitoli esposta la dottrina dell'equilibrio, e del moto dei fluidi, sarà opportuno, che come in appendice a questa interessante parte della Meccanica ragioniamo alcun poco di certi fenomeni, che presentano una particolar eccezione alle leggi dell'equilibrio, e di certe curiose singolarità nel moto dei liquidi, e dei corpi in essi immersi. Intendo di parlare dei fenomeni prodotti dalla così detta *Capillarità*.

Chiamansi *capillari* i tubi di vetro, che hanno il diametro del foro di circa $\frac{1}{2}$ linea. o anche più piccolo. È noto, che se s' immerga uno di questi tubi verticalmente in un liquido, il liquido talvolta vi si solleva al di sopra, talvolta vi si deprime al di sotto del livello nel recipiente; e ciò tanto più, quanto più piccolo è il diametro del foro, qualunque sia la grossezza delle pareti. Si sollevano i liquidi, che bagnano il vetro, come per es. l'acqua, l'alcool, ec.; si deprimono quei, che non lo bagnano, per es. il mercurio. Talvolta per altro si vede il mercurio sollevarsi, l'acqua deprimersi: e ciò segue, se quello sia in tubi secchissimi, questa in tubi spalmati internamente di grasso. È poi un fatto costante, che la colonna liquida quando si solleva, o si deprime dentro del tubo si conforma sempre nella sommità in un menisco concavo, o convesso in alto.

853. Un simil fenomeno si osserva immergendo in un liquido due lamine di cristallo parallele, e colle facce a piccolissima distanza tra loro. Il liquido si sol-

leva, o si deprime tra esse precisamente come nei tubi: solo l' altezza della elevazione, o della depressione è la metà di quella, che si manifesta in un tubo, che abbia il diametro del foro eguale alla distanza, che passa tra l'una, e l' altra lamina. Anche in questo caso si vede concava la superficie del liquido elevato, convessa quella del liquido depresso.

854. Si ha pure elevazione del liquido essendo le lamine immerse inclinate tra loro in modo, che si intersechino, o si riuniscano in una linea verticale. Ma in tal caso l' altezza, cui si sollevano i fili del liquido tra le due lamine è varia, e precisamente reciproca alle distanze dei corrispondenti punti opposti delle superficie delle due lamine; talchè la sommità della colonna liquida elevata in questo caso si conforma in figura d' un'iperbola equilatera, i cui asintoti sono per una parte la comune intersezione delle lamine, per l' altra il livello del liquido, in cui sono immerse. Abbiamo parlato di tubi, e lamine di vetro per fissar le idee; ma i fenomeni stessi si hanno anche se i tubi, e le lamine siano d' altre sostanze.

Ma le lamine parallele immerse a piccolissima distanza in un liquido non solo ne producono l' elevazione, o la depressione sotto al livello; ma sono anche reciprocamente attratte, o repulse. Se sono a tal distanza tra loro, che la curvatura o concava, o convessa, che il liquido prende presso dell' una sia separata per uno strato di liquido, che abbia la superficie piana, dalla curvatura presso dell' altra, le lamine non soffrono nè attrazione, nè repulsione: ma sono attratte, o repulse, ove la lor distanza sia tale, che le curvature s' incrocino. Sono attratte, se ambedue sono o bagnate, o non bagnate dal liquido; son re-

pulse, se una è bagnata, l' altra non lo è; come per esse le lamine immerse nell' acqua siano una d' avorio, l' altra di talco. Ciò si rileva dall' esperienze d' Hauy (V. *Méc. céleste supplém. à la theorie capillaire p.* 47).

Nè le sole lamine, ma anche due globetti di varie sostanze galleggianti sopra un liquido si attraggono, se sono l' uno, e l' altro bagnati, o non bagnati; si repellono, se uno è bagnato, l' altro non lo è. Tutti i divisati fenomeni han luogo tanto nell' aria quanto nel vuoto; e quindi è chiaro, che sono indipendenti affatto dall'azione dell' atmosfera.

I fenomeni capillari hanno tanto interessata la curiosità dei Fisici, che se ne sono studiate tutte le modificazioni con moltissime ingegnose ricerche. Il nostro piano non ci permettendo di darne conto, avvertiamo gli Studiosi, che troveranno negli Elementi di Fisica del Pouillet (*T.* 2 *par.* 1 *lib.* 6 *cap.* 1) la descrizione degli apparati necessarj a far le sperienze, che abbiamo accennate; i resultati precisi d' un gran numero di queste sperienze in diversi liquidi, e corpi di diversa figura; diversi sperimenti analoghi; e varie applicazioni della dottrina relativa a questi fenomeni.

865. Da molto tempo i Fisici han cercata la cagione degli accennati fenomeni, e diverse spiegazioni sono state proposte da diversi Autori. Senza trattenerci a parlare di quelle immaginate da Jurin, Clairaut, Segner, e Young, accenneremo brevemente i principj, e i resultati della teorica del La Place ricevuta generalmente come la vera.

È scorso ormai più d' un secolo, da che i Fisici han conosciuto, che esiste generalmente un' attrazione speciale tra i solidi, e i liquidi, e tra gli strati d' una

massa liquida. Sembra che il Taylor, fosse il primo a dimostrarla, facendo vedere, che un disco solido collocato sopra un liquido non può sollevarsi orizzontalmente con quella stessa facilità, con cui si solleverebbe, se fosse libero nell'aria. Per provarlo egli sostituiva a uno dei piatti d'una bilancia un disco ora di una, ora d' un' altra sostanza; e mettendolo in equilibrio a contatto ora di uno, ora d' un altro liquido, trovava, che per sollevarlo bisognava un peso diverso pe' diversi dischi, e diversi liquidi, sempre maggiore di quello, che sarebbe occorso ove fosse mancato il contatto col liquido. In seguito il Cigna, Guyton, e in ultimo il Gay-Lussac hanno fatte con simil metodo molte sperienze, per le quali è posto ormai fuor di dubbio, che esiste un' attrazione tra i solidi, e i liquidi; e tra gli strati dei liquidi stessi. Quando il disco è bagnato dal liquido, su cui riposa, elevandosi porta seco un sottile strato del liquido; e lo sforzo, che si fa per sollevarlo serve a distaccar detto strato dal contiguo. Realmente un disco di qualunque sostanza sia, purchè sia bagnato da un dato liquido, su cui posi, se abbia eguali dimensioni esige eguale sforzo per esser sollevato: fatto che primieramente dà il modo di conoscer la forza, con cui stanno aderenti gli strati dei diversi liquidi; secondariamente dimostra, che il primo per quanto sottilissimo strato liquido, che si attacca al solido, basta a impedire l'attrazione speciale del solido col liquido; d' onde si deduce, che l' attrazione tra il solido, e il liquido, e quella degli strati liquidi tra loro è un' azione molecolare, la quale non si manifesta, che nel contatto.

Stabilita questa dottrina fisica, ecco come il La Place dedusse la spiegazione dei fenomeni dei tubi capillari dalla configurazione della sommità della colonna liquida, elevata o depressa.

Il fatto dimostra, che uno stretto anello, o una piccola zona di vetro immediatamente al di sopra dell'acqua (per fissar le idee) l'attrae con una forza tale, che se il tubo, cui appartien questo anello, sia di molto piccol diametro, è capace di sostenere una sottil falda in contrasto colla gravità di essa: la superficie della qual falda si conforma in una curva concava superiormente per la combinazione dell' attrazione del vetro col peso dell' acqua, e colla coesione delle sue particelle. Quindi ha origine il piccolo menisco d'acqua, che termina la colonna elevata nel tubo. Che se il liquido è non già acqua, ma mercurio, la piccola zona di vetro, che immediatamente gli sovrasta, o lo repelle, o lo attrae meno di quel, che si attraggono tra loro le particelle di esso mercurio; e da ciò nasce, che la colonna liquida deprimendosi termina in un menisco convesso in alto.

Ora il La Place osserva, che quando un liquido in quiete prende naturalmente una superficie orizzontale, questo liquido esercita sopra se stesso un' azione propria indipendente dalla gravità terrestre, azione, che tende a far entrare le particelle della superficie nell' interno della massa liquida, e che produrrebbe realmente questo effetto senza la resistenza, che proviene dalla impenetrabilità. Ora se per qualche cagione questa superficie divien concava, o convessa, come nei tubi capillari, il calcolo dimostra, che l'attrazione del liquido sopra se stesso si riduce diversa da quel, che era la superficie essendo piana: è più forte, se la superficie divien convessa all' esterno, più debole, se divien concava. Il primo caso è quello del mercurio, che si abbassa nel tubo di vetro; il secondo quello dell' acqua, che vi si solleva. Per una colon-

na circolare contenuta in un tubo esilissimo, la variazione della forza attrattiva è quasi esattamente reciproca al diametro interno del tubo; e la espressione analitica, che ne dà il valore mostra, che questo si riduce alla metà, se il tubo si cangia in due piani paralleli, la cui distanza eguagli il suo diametro interno.

857 Ciò stabilito, sia immerso nell' acqua il tubo capillare di vetro MN (*Fig.* 78), e siasi l' acqua conformata dentro di esso in una colonna terminata superiormente col menisco concavo cSb. Supponiamo un canaletto strettissimo di qualunque figura, che partendo dal punto più basso S del menisco traversi il tubo, si ripieghi in M, e venga a terminare in H sulla superficie libera del liquido in equilibrio. Perchè questa sia in equilibrio, bisogna, che in equilibrio sia pure il liquido contenuto nel canaletto. Ora questo è premuto ai suoi orifizj S, e H da forze ineguali: maggiore è la forza, che corrisponde alla superficie piana nella parte HM, minore quella, che corrisponde alla superficie concava nella parte SM. Convien dunque per l' equilibrio (726), che la colonna SM si sollevi tanto, da supplire coll' aumento di peso prodotto dall' aumento d' altezza la deficienza della pressione per la variazione sofferta dalla forza attrattiva reciprocamente al diametro del foro (856). E siccome questa deficienza si riduce la metà nel caso, che il tubo si converta in due lamine; così in questo caso dee sollevarsi, e di fatto si solleva il liquido alla metà dell' altezza, cui giugne nell' altro.

Quando la sommità della colonna liquida si conforma in un menisco convesso segue precisamente il contrario, che nel caso or contemplato; perchè accrescendosi la pressione del liquido contenuto nel tubo, esso

liquido dee deprimersi per ridursi all' equilibrio col liquido esterno meno premuto.

Paragonando poi le pressioni, che il liquido esercita sulle pareti interne, ed esterne de' tubi, e delle lamine, ed osservando i segni dell' espressioni, che ne determinano la quantità, ed il senso, si trova, che queste spingono in dentro le pareti dei tubi; le lamine parallele poi sono spinte l'una contro l' altra quando l' una, e l' altra son bagnate dal fluido. Ma quando una lamina è bagnata, l' altra non lo è, le pressioni agiscono sulle lamine in senso opposto, ed esse son obbligate ad allontanarsi scambievolmente. Lo stesso si avvera relativamente ai globetti galleggianti.

Il La Place ha analizzati, e spiegati tutti i sopraindicati fenomeni con ampio sfoggio di sublimi calcoli nel Lib. X. della Meccanica celeste (*supplément*); ma il nostro Sig. Pessuti ha ridotta questa spiegazione alla portata di quelli, che conoscono solo gli elementi della Matematica in una Mem. inserita nel T. 14 di quelle della Società Italiana. Noi lasceremo, che gli Studiosi vedano in questa Memoria le dimostrazioni opportune de' resultati accennati, che noi non avremmo potuto dare senza diffonderci soverchiamente.

858. All' azione capillare debbonsi molti fenomeni, e segnatamente l' assorbimento, e filtrazione dei liquidi; l' ascensione, e il moto degli umori nei vegetabili; e in generale l' ascensione de' liquidi ne' corpi porosi; le così dette *vegetazioni* dei sali, o le cristallizzazioni, che oltrepassano la superficie dei liquidi, ec. Il Poisson ha creduto di poter ridurre in certo modo all' azione capillare anche la spiegazione del fenomeno indicato col nome *endosmosi* (42). Un tubo cilindrico di vetro, per fissare le idee, di piccol diametro, e della lun-

ghezza di 7 in 8 pollici termini inferiormente allargandosi in un tubo conico senza fondo. Si chiuda esattamente questo tubo conico con una membrana animale, per es. con una vessica: vi s' infonda tal quantità d' alcool, che ne giunga il livello a circa $\frac{1}{4}$ dell' altezza del cilindro: e quindi s' immerga la parte conica in un recipiente pieno d'acqua. L' acqua, per quanto specificamente più grave dell' alcool, s' insinua a traverso ai pori della vessica entro il tubo conico, e quindi sollecitamente si solleva il livello dell' alcool nel cilindro: e continuando l' esperimento per qualche tempo, il liquido giugne a traboccare dalla sommità del cilindro.

Qual è la cagione di questo fenomeno? Non sembra per verità, che debba attribuirsi all' ordinaria azione capillare, che può ben sollevare un liquido dentro un tubo; ma non può farlo traboccare. Il Dutrochet, che prima d' ogn' altro ha descritto questo fenomeno, ne ha data una spiegazione, che accenneremo altrove, perchè dipende da principj non per anche esposti; ma che per verità non sembra da ammettersi. Più ingegnosa non solo, ma anche più verosimile è quella, che il Poisson ha dedotta da principj analoghi a quelli, con cui si spiegano gli ordinarj fenomeni capillari. Due liquidi A, B (*Fig.* 79) separati da un divisorio verticale comunichino tra loro per mezzo di un tubo capillare a b, e le loro altezze al di sopra di a b sian reciproche alle respettive densità, onde ne siano equilibrate (725) le pressioni idrostatiche sulle estremità di a b. Supponiamo, che il liquido B abbia per il liquido A un' attrazione maggiore di quella, che han tra loro le molecole di A. Il filetto liquido a b non può ricever moto dal tubo supposto omogeneo, perchè le azioni di esso essendo eguali in

tutti i sensi, si fanno equilibrio. Ma se l' attrazione di B sulla estremità b del filetto liquido è maggiore di quella del liquido A sulla estremità a, si ecciterà un moto; e il liquido scorrerà de A verso B fino a tanto, che l' elevazione del livello, che ne resulta da questa parte compensi coll' aumento di pressione l' eccesso della forza attrattiva di B sulla forza di A. Supponendo dunque, che l' attrazione, che l' alcool ha per l' acqua sia maggiore di quella, che han tra loro le molecole dell' acqua, il fenomeno sarà spiegato.

Non può negarsi, che questa spiegazione è molto elegante: ma se si osservi, che è affatto ipotetica; che nella formula, con cui si determina l' azione non essendo alcun elemento relativo al diametro del tubetto di comunicazione, dovrebbe esercitarsi eguale azione da tubi di qualunque diametro, il che è contradetto dall'esperienza; e finalmente che per esser la reazione sempre eguale, e contraria all'azione, e mobili egualmente le molecole di A, e di B, non vi è ragione, che determini la direzione del moto in un senso piuttosto, che in un altro, dovrem concludere, che l' esposta spiegezione per quanto elegante non è pienamente esatta; e che forse bisognano ancora molte sperienze per giugnere a spiegare il fenomeno come conviene.

Di qualche altro effetto attribuito all' azione capillare parleremo nella seconda parte del nostro Corso; e qui porrem termine alla prima.

FINE DEL TOMO SECONDO.

INDICE

ERRORI			CORREZIONI
P. 2	v. 21	124.	128
— 20	— 27	densità, perchè	Densità, e perchè
— 194	— 27	779.	778
— 232	— 24	che questa . . .	che sia questa
— 239	— 24	865.	855
— 240	— ult.	liquida, elevata	liquida elevata,